**立体几何专题：外接球问题中常见的8种模型**



**一、墙角模型**

适用范围：3组或3条棱两两垂直；可在长方体中画出该图且各顶点与长方体的顶点重合

直接用公式，即，求出

【补充】图1为阳马，图2和图4为鳖臑

**二、麻花模型**

适用范围：对棱相等相等的三棱锥

对棱相等指四面体的三组对棱分别对应相等，且这三组对棱构成长方体的三组对面的对角线。

推导过程：三棱锥（即四面体）中，已知三组对棱分别相等，（，，**）**

第一步：画出一个长方体，标出三组互为异面直线的对棱；

第二步：设出长方体的长宽高分别为**，**

**，，，**列方程组，

，

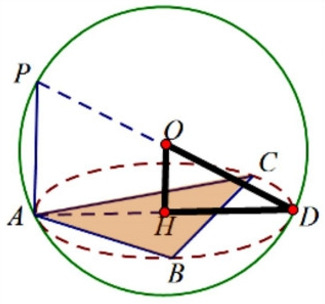
补充：

第三步：根据墙角模型，，

，，求出.

**三、垂面模型**

适用范围：有一条棱垂直于底面的棱锥。

推导过程：

第一步：将画在小圆面上，为小圆直径的一个端点，

作小圆的直径,连接,则 必过球心.

第二步：为的外心，所以平面，

算出小圆的半径

(三角形的外接圆直径算法:利用正弦定理.

第三步：利用勾股定理求三棱锥的外接球半径：

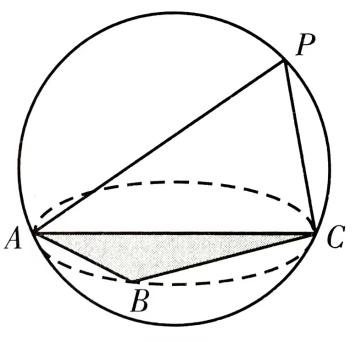
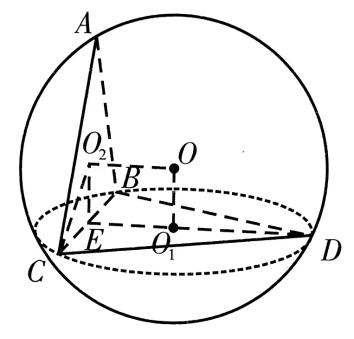
（1）；

（2）.

公式：

**四、切瓜模型**

适用范围：有两个平面互相垂直的棱锥

推导过程：分别在两个互相垂直的平面上取外心、过两个外心做两个垂面的垂线，

两条垂线的交点即为球心0，取B C的中点为，

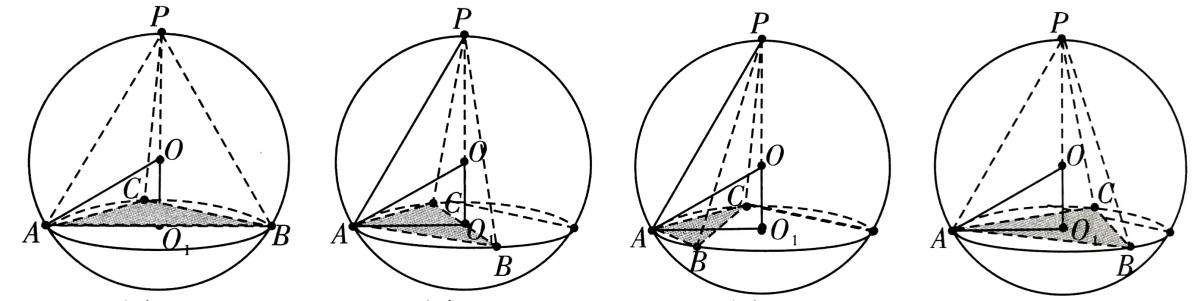
连接、、、为矩形

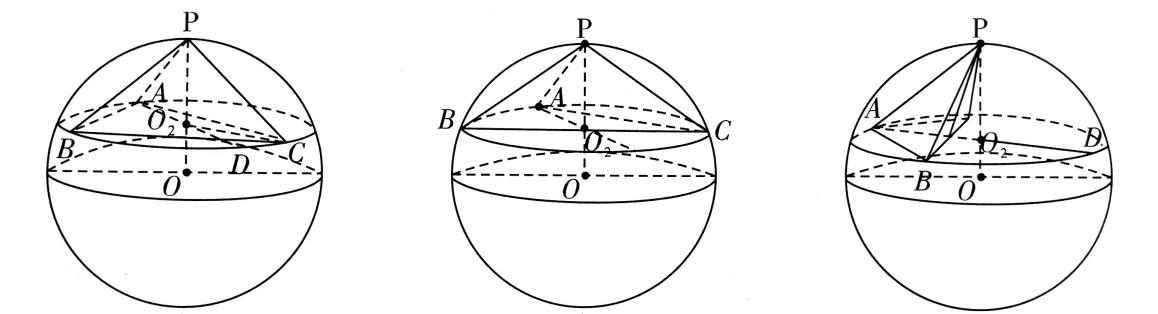
由勾股可得

公式：

**五、斗笠模型**

适用于：顶点的投影在底面的外心上的棱锥



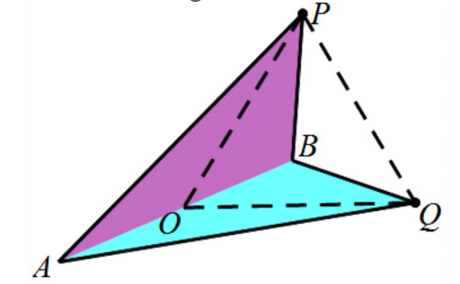


推导过程：取底面的外心，连接顶点与外心，该线为空间几何体的高，在上取一点作为球心0，根据勾股定理

公式：

**六、矩形模型**

适用范围：两个直角三角形的斜边为同一边，则该边为球的直径



推导过程：图中两个直角三角形和，其中，求外接圆半径

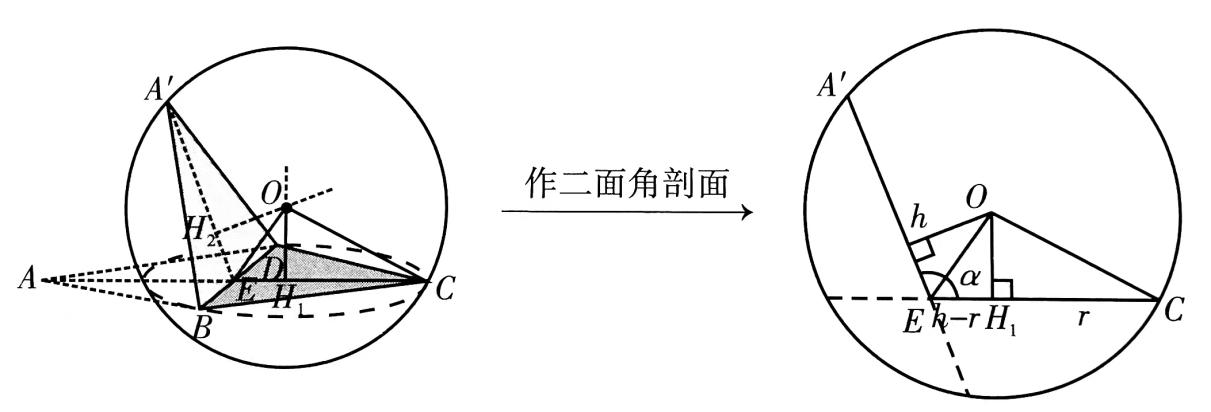
取斜边的中点，连接，则

所以点即为球心，然后在中解出半径

公式：（为斜边长度）

**七、折叠模型**

适用范围：两个全等三角形或等腰三角形拼在一起，或菱形折叠.



推导过程：两个全等的三角形或者等腰拼在一起，或者菱形折叠，

设折叠的二面角 .

如图，作左图的二面角剖面图如右图：

和分别为外心，

分别过这两个外心做这两个平面的垂线且垂线相交于球心



由勾股定理可得：.

公式：

**八、鳄鱼模型**

适用范围：所有二面角构成的棱锥，普通三棱锥

方法：找两面外接圆圆心到交线的距离，找二面角，找面面交线长度

推导过程：取二面角两平面的外心分别为,并过两外心作这两个面的垂线，

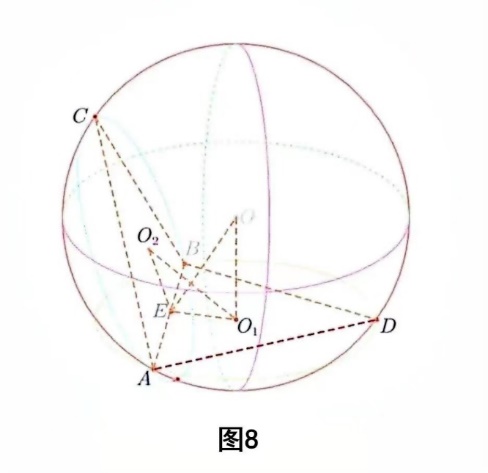
两垂线相交于球心，取二面角两平面的交线中点为，

则四点共圆，由正弦定理得：①

在中，由余弦定理得：②

由勾股定理得：③

由①②③整理得：

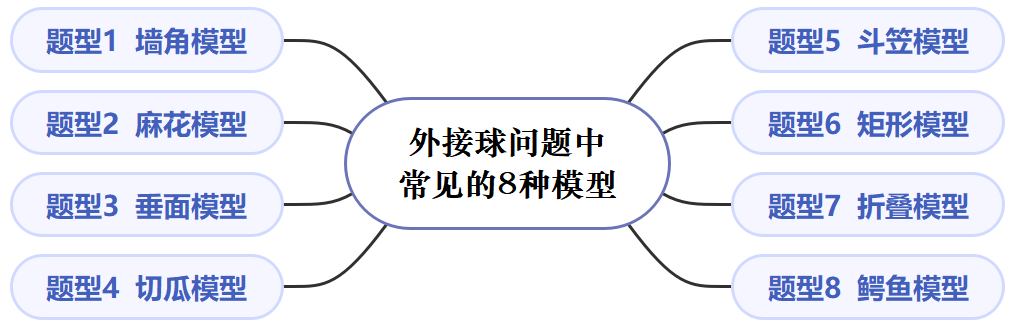


记

则

公式：





**题型一 墙角模型**

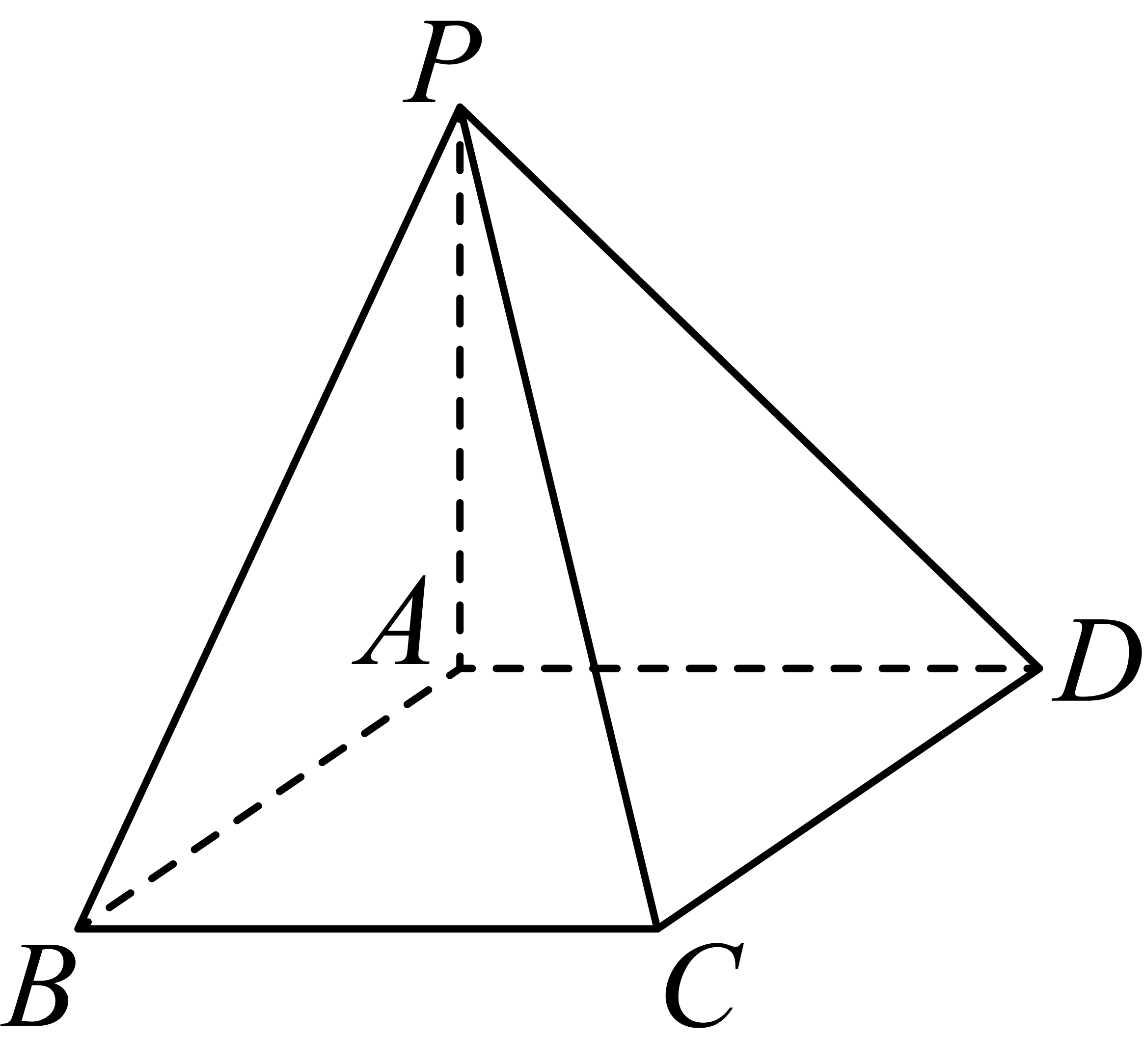
【例1】（2023·高一单元测试）三棱锥*A*-*BCD*中，平面*BCD*，，，则该三棱锥的外接球表面积为（ ）

A． B． C． D．

【变式1-1】（2022秋·陕西西安·高一统考期末）在《九章算术》中，将四个面都为直角三角形的三棱锥称之为鳖臑．已知在鳖臑中，满足平面，且，，，则此鳖臑外接球的表面积为（ ）

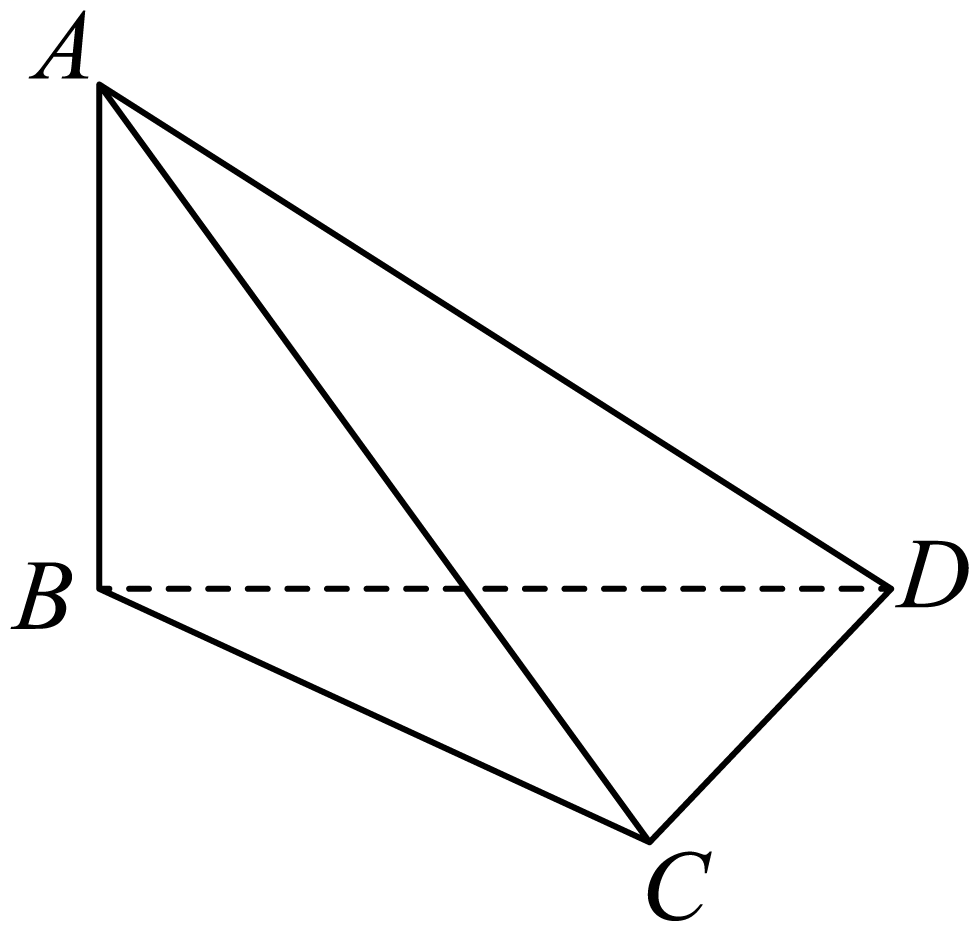
A． B． C． D．

【变式1-2】（2023·高一课时练习）《九章算术》是我国古代数学名著，它在几何学中的研究比西方早多年．在《九章算术》中，将底面为矩形且一侧棱垂直于底面的四棱锥称为阳马．如图是阳马，，，，．则该阳马的外接球的表面积为（ ）



A． B． C． D．

【变式1-3】（2023·广西南宁·统考二模）在《九章算术》中，将四个面都是直角三角形的四面体称为鳖臑，在鳖臑中，平面，，，已知动点从点出发，沿外表面经过棱上一点到点的最短距离为，则该棱锥的外接球的体积为\_\_\_\_\_\_.



【变式1-4】（2023春·辽宁朝阳·高二北票市高级中学校考阶段练习）已知四棱锥的外接球*O*的表面积为，平面*ABCD*，且底面*ABCD*为矩形，，设点*M*在球*O*的表面上运动，则四棱锥体积的最大值为\_\_\_\_\_\_.

**题型二 麻花模型**

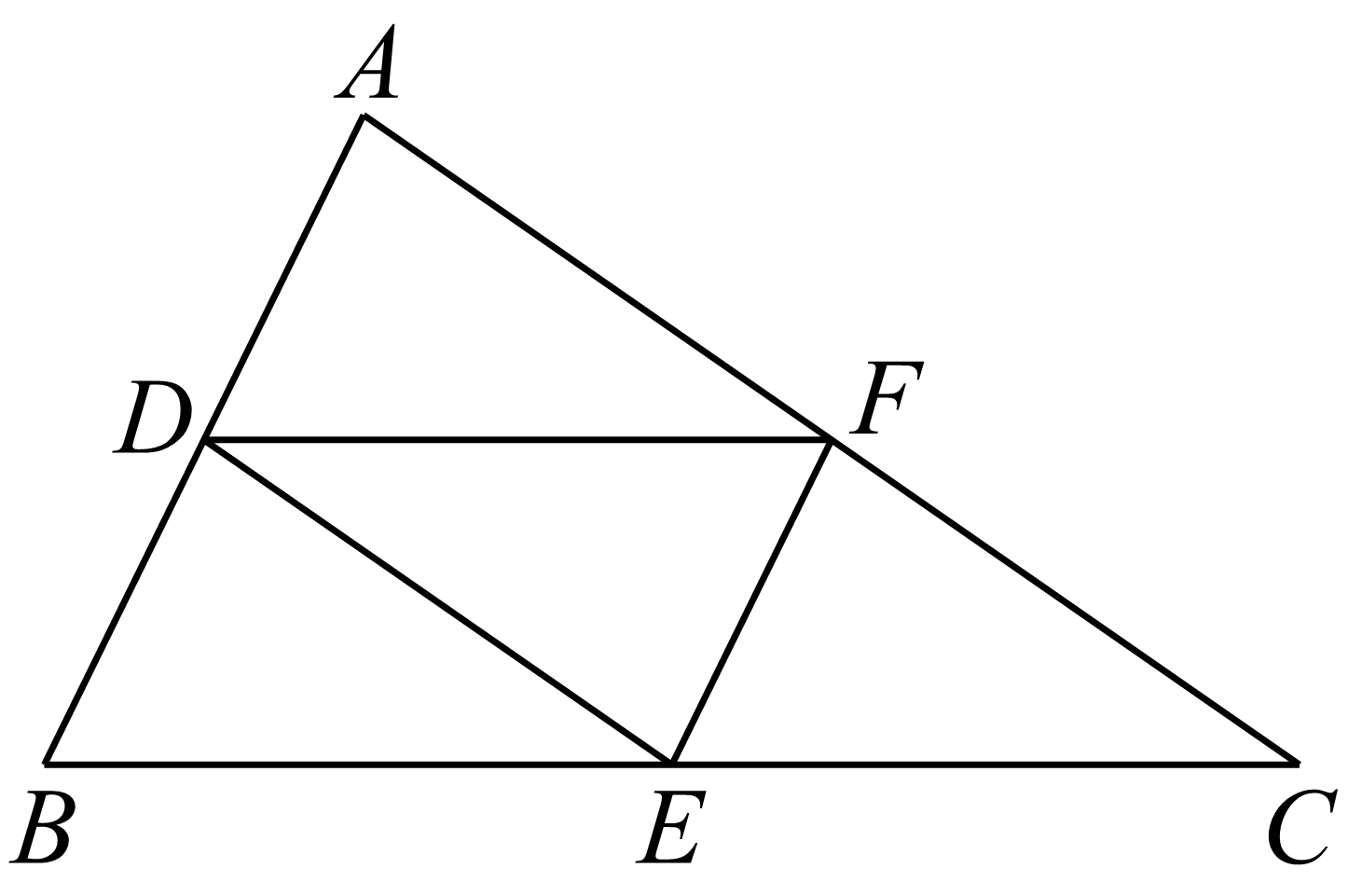
【例2】（2023春·广东梅州·高二统考期中）已知三棱锥的四个顶点都在球的球面上，且，，，则球的体积是（ ）

A． B． C． D．

【变式2-1】（2022春·江西景德镇·高一景德镇一中校考期中）在△*ABC*中，，将△*ABC*绕*BC*旋转至△*BCD*的位置，使得，如图所示，则三棱锥外接球的体积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



【变式2-2】（2023秋·吉林·高一吉林一中校考阶段练习）如图，在中，，*D*，*E*，*F*分别为三边中点，将分别沿向上折起，使*A*，*B*，*C*重合为点*P*，则三棱锥的外接球表面积为（ ）



A． B． C． D．

【变式2-3】（2023·江西·统考模拟预测）在三棱锥中，已知，则三棱锥外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【变式2-4】（2022·全国·高三专题练习）已知四面体*ABCD*的棱长满足*AB*＝*AC*＝*BD*＝*CD*＝2，*BC*＝*AD*＝1，现将四面体*ABCD*放入一个轴截面为等边三角形的圆锥中，使得四面体*ABCD*可以在圆锥中任意转动，则圆锥侧面积的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_．

**题型三 垂面模型**

【例3】（2023·高一单元测试）在三棱锥中，平面，，，，则三棱锥的外接球半径为（ ）

A．3 B． C． D．6

【变式3-1】（2023·全国·高一专题练习）已知*A*，*B*，*C*，*D*在球*O*的表面上， 为等边三角形且边长为3，平面*ABC*，，则球*O*的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【变式3-2】（2020春·天津宁河·高一校考期末）在三棱锥中，面，且在中，，则该三棱锥外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【变式3-3】（2023·全国·高一专题练习）已知*A*，*B*，*C*，*D*在球*O*的表面上，为等边三角形且其面积为，平面*ABC*，*AD*＝2，则球*O*的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【变式3-4】（2022春·山东聊城·高一山东聊城一中校考阶段练习）在四棱锥中，平面，四边形*ABCD*为矩形，，*PC*与平面所成的角为，则该四棱锥外接球的体积为（ ）

A． B． C． D．

**题型四 切瓜模型**

【例4】（2023·贵州贵阳·校联考模拟预测）在三棱锥中，已知，且平面平面*ABC*，则三棱锥的外接球表面积为（ ）

A． B． C． D．

【变式4-1】（2023·四川达州·统考二模）三棱锥的所有顶点都在球*O*的表面上，平面平面*BCD*，，，，则球*O*的体积为（ ）

A． B． C． D．

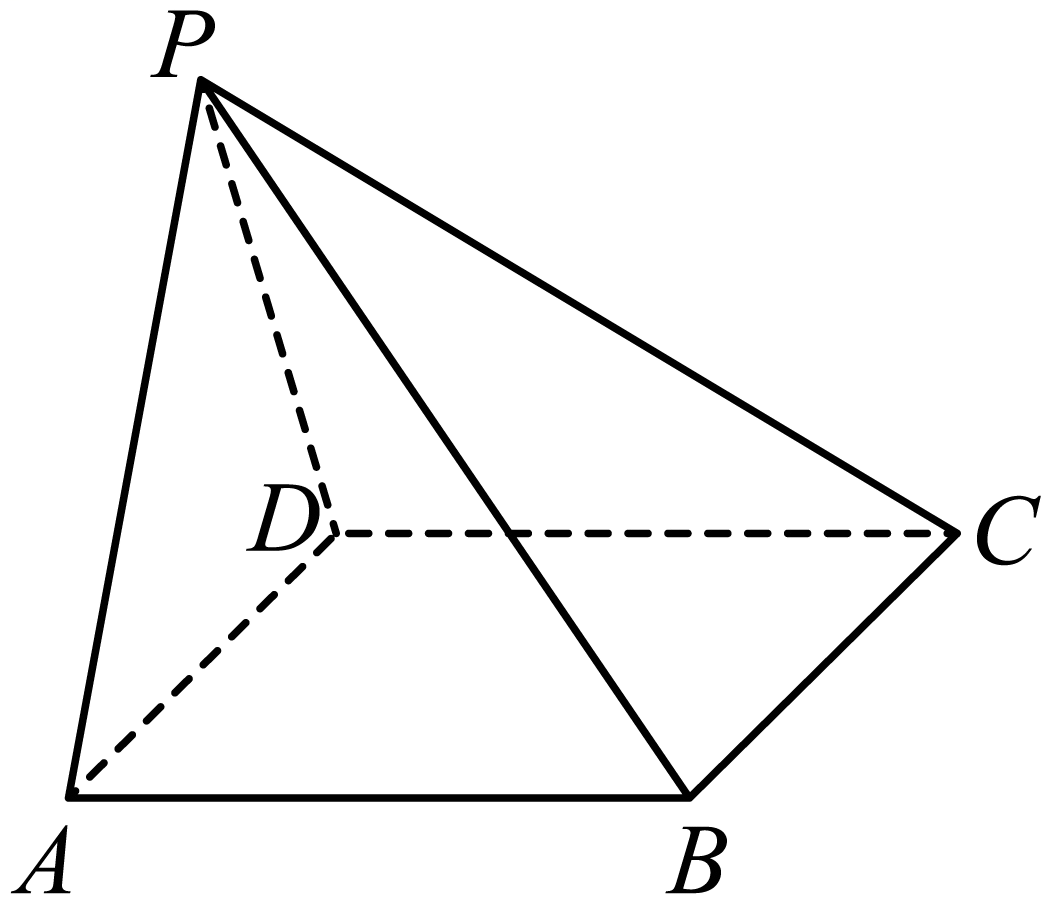
【变式4-2】（2023春·陕西西安·高一长安一中校考期中）在直三棱柱中，，，点*P*为的中点，则四面体*PABC*的外接球的体积为（ ）

A． B． C． D．

【变式4-3】（2022·高一单元测试）四棱锥的顶点都在球的表面上，是等边三角形，底面是矩形，平面平面，若，，则球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【变式4-4】（2021·高一课时练习）在四棱锥中，平面平面，且为矩形，，，，，则四棱锥的外接球的体积为（ ）



A． B． C． D．

【变式4-4】（2023春·全国·高一专题练习）在四棱锥中，*ABCD*是边长为2的正方形，，平面平面，则四棱锥外接球的表面积为（ ）

A．4π B．8π C． D．

**题型五 斗笠模型**

【例5】（2023·全国·高一专题练习）正四面体内接于一个半径为*R*的球，则该正四面体的棱长与这个球的半径的比值为（ ）

A． B． C． D．

【变式5-1】（2022·高一专题练习）已知正四棱锥（底面四边形是正方形，顶点*P*在底面的射影是底面的中心）的各顶点都在同一球面上，底面正方形的边长为，若该正四棱锥的体积为，则此球的体积为（ ）

A． B． C． D．

【变式5-2】（2022·全国·高一专题练习）某四棱锥的底面为正方形，顶点在底面的射影为正方形中心，该四棱锥内有一个半径为1的球，则该四棱锥的表面积最小值是（ ）

A．16 B．8 C．32 D．24

【变式5-3】（2022春·安徽·高三校联考阶段练习）在三棱锥中，侧棱，，，则此三棱锥外接球的表面积为\_\_\_\_\_\_\_．

**题型六 矩形模型**

【例6】（2022春·全国·高一期末）已知三棱锥*A*-*BCD*中，，，则此几何体外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【变式6-1】（2022春·广东惠州·高一校考期中）在矩形中，，现将沿对角线翻折，得到四面体，则该四面体外接球的体积为（ ）

A． B． C． D．

【变式6-2】（2022春·河北沧州·高一校考阶段练习）矩形中，，沿将三角形折起，得到的四面体的体积的最大时，则此四面体外接球的表面积值为（ ）

A． B． C． D．

【变式6-3】（2022春·四川成都·高一统考期末）在矩形*ABCD*中，*AB*=6，*AD*=8，将△*ABC*沿对角线*AC*折起，则三棱锥*B*-*ACD*的外接球的表面积为（ ）

A．36*π* B．64*π*

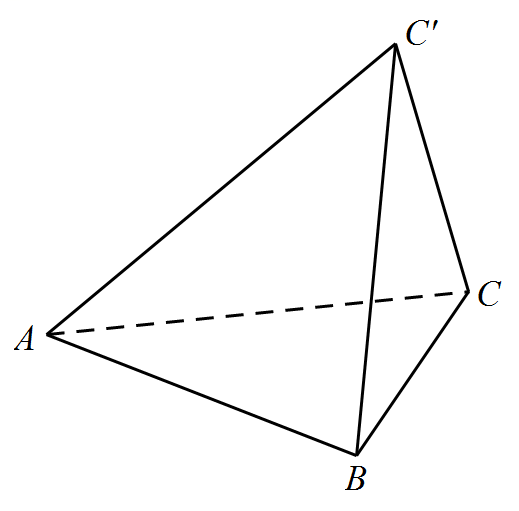
C．100*π* D．与二面角*B*-*AC*-*D*的大小有关

**题型七 折叠模型**

【例7】（2022春·陕西西安·高一长安一中校考期末）已知菱形的边长为3，，沿对角线折成一个四面体，使平面垂直平面，则经过这个四面体所有顶点的球的体积为（ ）．

A． B． C． D．

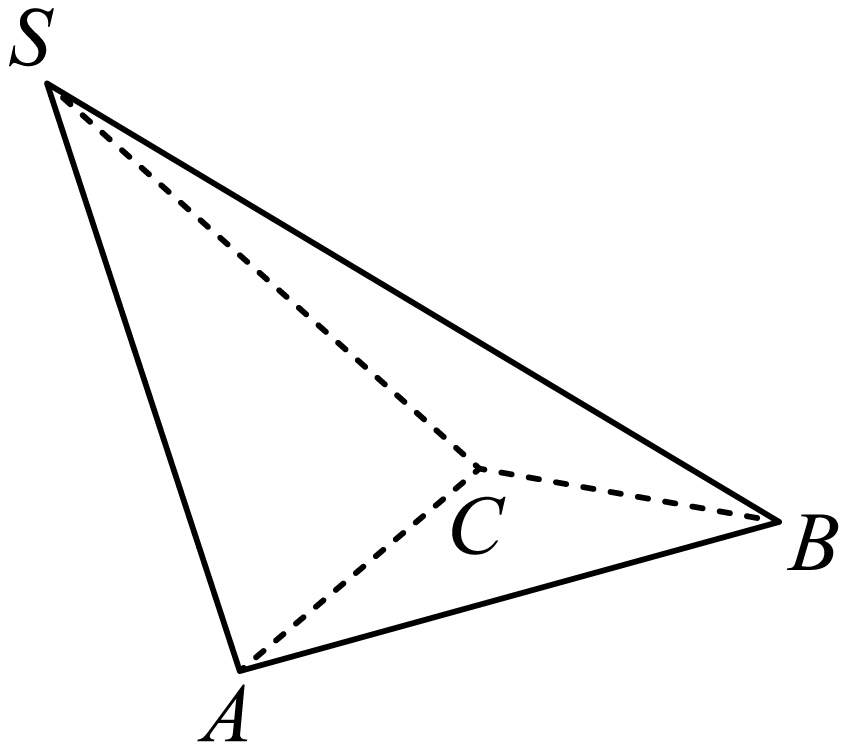
【变式7-1】已知等边的边长为2，将其沿边旋转到如图所示的位置，且二面角为，则三棱锥外接球的半径为



【变式7-2】（2023·广西南宁·统考二模）蹴鞠，又名“蹴球”“蹴圈”等，“蹴”有用脚蹴、踢的含义，鞠最早系外包皮革、内饰米糠的球，因而“蹴鞠”就是指古人以脚蹴、踢皮球的活动，类似今日的足球，现已知某“鞠”的表面上有四个点满足，，则该“鞠”的表面积为\_\_\_\_\_\_\_.

【变式7-3】（2022秋·福建泉州·高三校考开学考试）在三棱锥中，，二面角的大小为，则三棱锥的外接球的表面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【变式7-4】（2022秋·山东德州·高二统考期中）已知在三棱锥中，中，，，，二面角的大小为，则三棱锥的外接球的表面积为（ ）



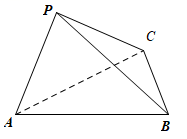
A． B． C． D．

**题型八 鳄鱼模型**

【例8】（2022春·四川成都·高一树德中学校考期末）已知在三棱锥中，，，，二面角的大小为，则三棱锥的外接球的表面积为（ ）

A． B． C． D．

【变式8-1】（2023春·全国·高一专题练习）如图，在三棱锥，是以*AC*为斜边的等腰直角三角形，且，，二面角的大小为，则三棱锥的外接球表面积为（ ）

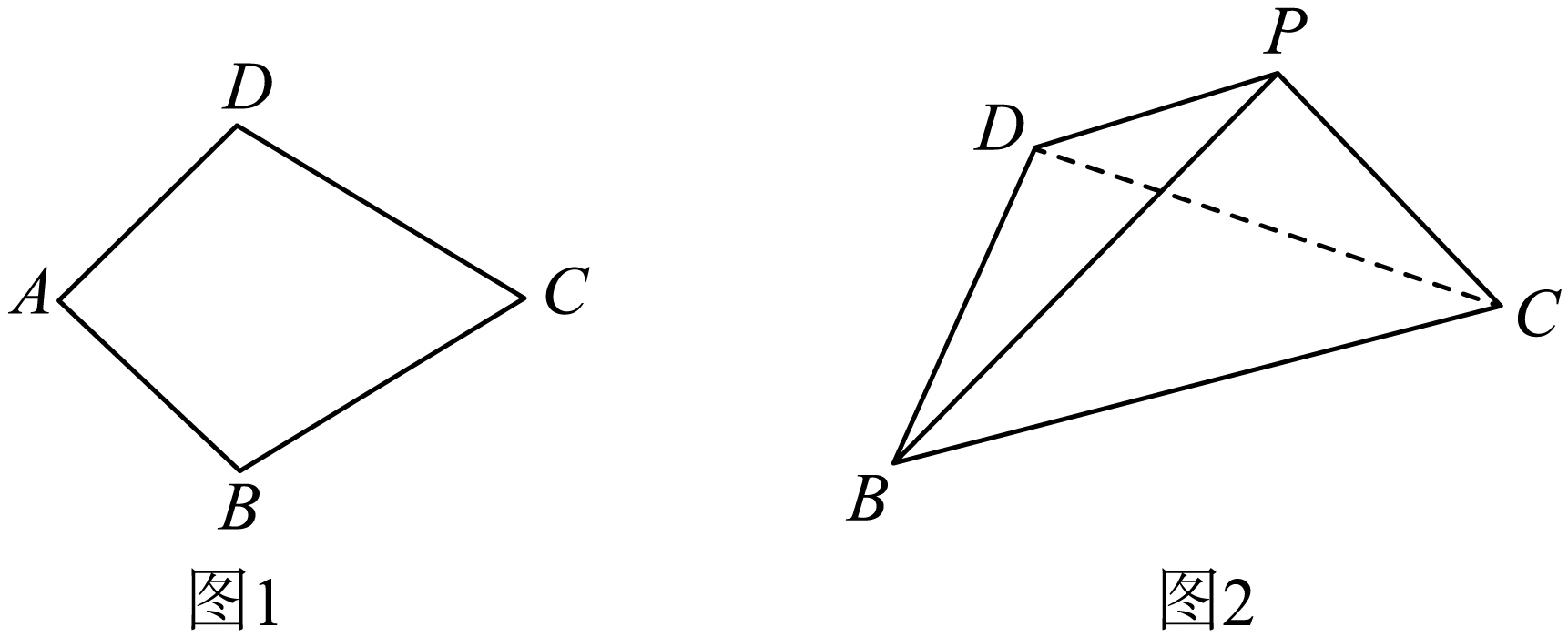


A． B． C． D．

【变式8-2】（2023·陕西榆林·统考三模）在三棱锥中，，二面角为，则三棱锥外接球的表面积为（ ）

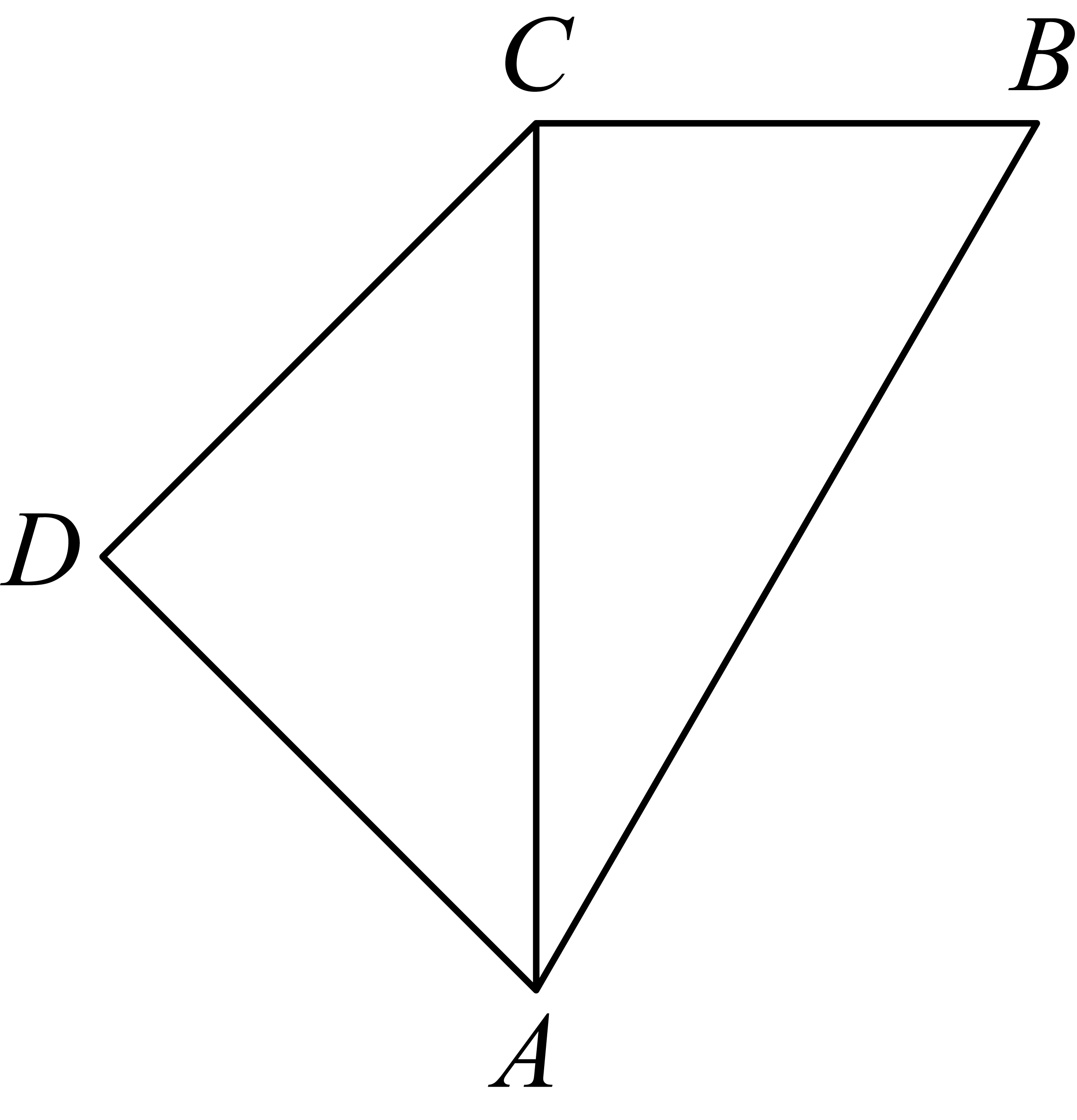
A． B． C． D．

【变式8-3】（2023春·安徽阜阳·高三阜阳市第二中学校考阶段练习）如图1，四边形中，，，，将沿翻折至，使二面角的正切值等于，如图2，四面体的四个顶点都在同一个球面上，则该球的表面积为（ ）



A． B． C． D．

【变式8-4】（2023·江西南昌·校联考模拟预测）在平面四边形中，，，，现将 沿着折起，得到三棱锥，若二面角的平面角为135°，则三棱锥的外接球表面积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.



【变式8-5】（2023春·广东广州·高三统考阶段练习）在三棱锥中，△*ABC*为等腰直角三角形，，△*PAC*为正三角形，且二面角的平面角为，则三棱锥的外接球表面积为\_\_\_\_\_\_\_\_．

