基于深度学习的高三数学专题复习教学策略

——以“与球有关的接、切、截问题”为例*

陆 丽 （江苏省太仓高级中学 215411）

摘 要 深度学习提供了开展素养导向学习的一条重要途径.深度学习强调学生的主体立场与有意义学习,强调四基的深度加工与理解,强调问题的深度探究与思考,强调有效的学习迁移和问题解决,强调活动的深度参与与体验,强调教学的育人功能与目标.本文以“与球有关的接、切、截问题”的专题复习为例,谈谈深度学习理念下的高三数学专题复习教学策略.

关键词 深度学习;专题复习;外接球;内切球;截面

文章编号 1004-1176(2023)12-0044-04

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下简称《课标》)指出,教学中要关注育人目的,注重培养学生核心素养,提高学生综合运用知识解决实际问题的能力,帮助学生把握学习的深度[1].深度学习提供了开展素养导向学习的一条重要途径.深度学习强调学生的主体立场与有意义学习,强调四基的深度加工与理解,强调问题的深度探究与思考,强调有效的学习迁移和问题解决,强调活动的深度参与与体验,强调教学的育人功能与目标.

目前的高三复习教学中,普遍存在学生“一听就懂、一做就错”的现象,原因是学生对所学知识并没能真正理解,也无法迁移已学知识去解决新的问题,其根本在于学生的学习不是真实的“深度学习”.基于深度学习理论,高三专题复习需立足学生原有认知,加强对数学概念、基本原理、基本模型、思想方法等内容的统整,形成前后紧密联系、过程逻辑连贯的专题复习结构.本文以“与球有关的接、切、截问题”的专题复习为例,谈谈深度学习理念下的高三数学专题复习教学策略.

1 教学设计

1.1 考情分析,明确方向

在高三教学中,教师要认真研读《课标》,研究历年高考真题,明确高考方向,厘清高考近年怎么考(考点分布、命题规律、考查能力)、曾经怎么考(历届高考题)、还可能怎么考(各地模拟题),通过专题教学,查找漏点,扫除盲点,攻克难点,突破热点.纵观近几年高考数学全国卷,对简单组合体的考查是热点之一,这类试题常用简单几何体与球的切、接、截等结构特征为命题背景,以选择题或填空题的形式出现.虽然是小题,但从图形的分解、组合到对图形的再加工,从几何论证到代数运算,处处体现了对模型识别能力、逻辑推理能力及运算求解能力的考查.

整理近十年全国高考试题中考查球的接、切、截问题的情况,在课堂上呈现表1.

表1 近十年全国高考试题考查球的接、切、截情况统计

时间	外接球问题	内切球问题	截面问题
2014年	大纲全国卷理科第8题		
2015年	全国卷Ⅱ理科第9题		
2016年		全国卷Ⅲ第10题	
2017年	全国卷Ⅱ文科第15题 全国卷Ⅲ理科第8题、文科第9题		
2018年	全国卷Ⅲ理科第10题、文科第12题		
2019年	全国卷Ⅰ理科第12题		
2020年		全国卷Ⅲ理科第15题	新高考全国卷第16题 全国卷Ⅱ理科第10题
2021年	全国甲卷理科第11题		
2022年	新高考Ⅰ卷第8题 新高考Ⅱ卷第7题		
2023年	全国甲卷文科第16题	新高考Ⅰ卷第12题	

设计意图 展示历年高考真题,旨在对本节课的核心问题进行定位,激发学生的学习热情,起到开门见山的作用.

1.2 回归教材,温故知新

教材作为课程的重要组成部分,架起了课程标准和教学内容之间的桥梁,是教与学的重要依据和载体.高考试题最重要的来源就是教材,因此在高三

* 本文系江苏省教育科学“十三五”规划2020年度课题“指向深度学习的高中数学课堂学习共同体构建研究”(C-a/2020/02/10)、江苏省基础教育前瞻性教学改革实验项目“指向理性精神培育的数学创新实验课程研究”(2020JSQZ0146)的阶段性研究成果.

教学中教师仍需研读教材，带领学生一起回归教材，只有真正读懂、读通、读透、读活教材，才能更好地领会高考试题的命题意图.

呈现教材中的问题.

问题 1　(人教 A 版教材必修第二册第 120 页第 5 题) 一个正方体的顶点都在球面上，它的棱长是 a cm，则球的体积为 ____.

变式 1　一个正方体的棱长为 a cm，则该正方体的内切球半径为 ____.

变式 2　一个正方体的棱长为 a cm，若一个球与该正方体的各条棱都相切，则该球的半径为 ____.

问题 1 可根据正方体图形的对称性进行直观想象，知其体对角线是外接球的直径；也可抓住过球心在过正方体两条“对棱”的截面来求解，这样就把空间问题中的外接球问题转化为平面问题中的外接圆问题.对于变式 1 和变式 2 也都可以运用上述的观察法和截面法来处理.最后，引导学生提炼与球有关问题的几何本质：一是确定球的要素，即球心和半径；二是球的直径性质，即球上任一点到直径端点的张角为直角；三是球的截面性质，即用一个平面截球，截面是圆面，截线是圆，球心与不过球心的截面圆心的连线垂直于截面，且球半径的平方等于球心到截面的距离与截面圆的半径的平方和.

设计意图　借助学生熟悉的正方体模型切入，旨在总结其外接球、内切球和棱切球的研究方法.

通过模型识别、几何直观、抽象概括、类比转化等数学思维过程，建构起深度的结构化知识体系，切实有效地提升了学生的直观想象素养.

1.3　深度理解，揭示本质

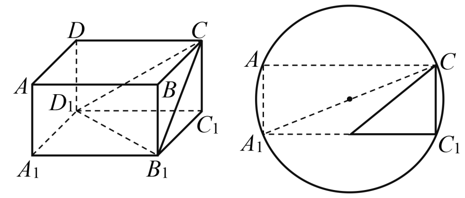
在高三教学中，教师要对问题进行深层次加工，引导学生通过深度体验和深度思考，达到深度理解，经历“知其然、知其所以然、何以知其所以然、何以由然”的过程，使学生的思维不断深入，使学习成为一种“再发现、再创造”的深度学习过程.

问题 2　已知体积为 $4\sqrt{6}$ 的长方体的八个顶点都在球 O 的球面上，在这个长方体经过同一个顶点的三个面中，如果有两个面的面积分别为 $2\sqrt{3}$，$4\sqrt{3}$，那么球 O 的体积等于(　).

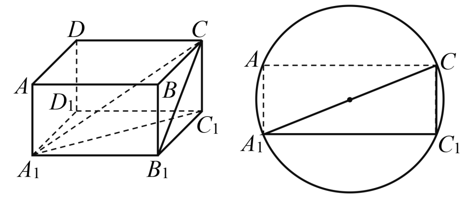
A.$\frac{32\pi}{3}$　B.$\frac{16\sqrt{7}\pi}{3}$　C.$\frac{33\pi}{2}$　D.$\frac{11\sqrt{7}\pi}{2}$

探究 1　取长方体不共面的 4 个顶点，请问它们能够形成具有哪些不同特征的四面体？如何求这些四面体外接球的半径呢？

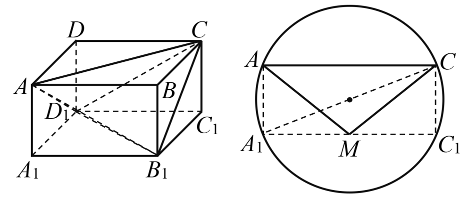
设计意图　从正方体模型到长方体模型，从正方体外接球问题类比到长方体外接球问题，符合学生的认知规律，容易找到问题的解题策略.但是，有一些几何体虽然不是长方体，它的外接球问题却与长方体的外接球问题有关.设置探究 1 旨在深度理解长方体模型，通过学生寻找四面体、剖析四面体特征(图 1)，最终提炼出利用补形法将几何体还原为长方体模型的求解策略.



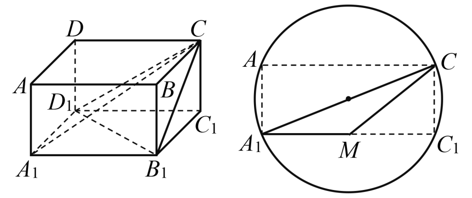
墙角模型 (三棱锥中交于同一顶点的三条棱两两垂直)



鳖臑模型 (三棱锥的四个面都为直角三角形)



对棱相等模型 (三棱锥中的对棱相等)



共斜边模型 (两直角三角形共斜边)

图 1

探究 2　在三棱锥 P-ABC 中，$\angle BAC=45°$，$AB=4$，$AC=\sqrt{2}$，若平面 $PA\perp$ 平面 ABC，$PA=\sqrt{6}$，则三棱锥 P-ABC 的外接球的表面积为 ______.

探究 3　在三棱锥 P-ABC 中，$\angle BAC=45°$，$AB=4$，$AC=\sqrt{2}$，若 $PA=PB=PC=\sqrt{6}$，则三棱锥 P-ABC 的外接球的表面积为 ______.

设计意图　对于一些特殊的四面体外接球问题，可以将其补成长方体，转化为长方体外接球问题，但对于一般的四面体外接球问题如何研究呢？设置两个探究问题，旨在让学生抓住与球相关问题的本质，利用球的截面性质确定外接球球心的位置，并计算出球的半径.

对于探究 2，可作出 $\triangle ABC$ 的外心 O_1(图 2)，设其外接圆半径为 r，过点 O_1 作面 ABC 的垂线 OO_1，设球心为 O，球的半径为 R，则 $OP=OA=R$，M 为 AP

的中点，进而$R^2=r^2+AM^2$. 此问题可进一步推广(图 3)，一般 n 棱锥 $P\text{-}A_1A_2\cdots A_n$ 中 $PA_1\perp$ 平面 $A_1A_2\cdots A_n$，它的外接球半径满足 $R^2=r^2+\left(\frac{PA_1}{2}\right)^2$，其中多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆半径为 r，n 棱锥 $P\text{-}A_1A_2\cdots A_n$ 的外接球半径为 R. 该棱锥模型的实质又与圆柱模型和直棱柱模型是等价的，进而得到一般的直棱模型外接球问题的求解策略.

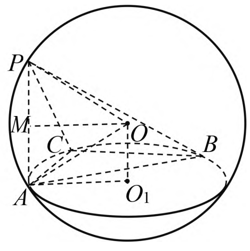


图 2

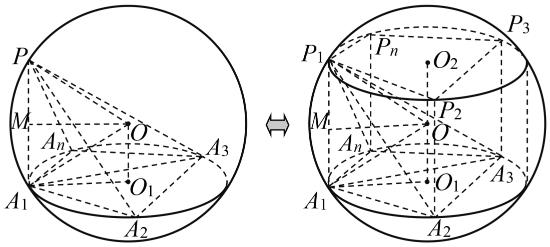


图 3

对于探究 3，如图 4，可作出 $\triangle ABC$ 的外心 O_1，设外接圆半径为 r，过点 O_1 作面 ABC 的垂线 OO_1，设球心为 O，球的半径为 R，则 $R^2=r^2+(PO_1-R)^2$(或$r^2=PO_1\cdot(2R-PO_1)$). 此问题可进一步推广(图 5)，一般 n 棱锥 $P\text{-}A_1A_2\cdots A_n$ 的侧棱都相等，则它的外接球半径满足 $R^2=r^2+(PO_1-R)^2$(或 $r^2=PO_1\cdot(2R-PO_1)$)，其中多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆半径为 r，n 棱锥 $P\text{-}A_1A_2\cdots A_n$ 的外接球半径为 R. 该棱锥模型的实质又与圆锥模型是等价的，进而得到一般的侧棱相等模型外接球问题的求解策略.

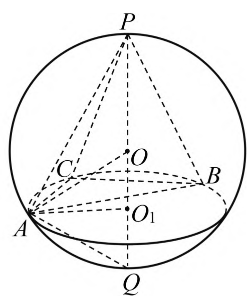


图 4

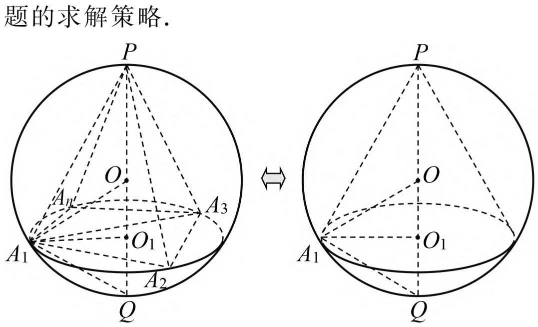


图 5

1.4　规律迁移，问题解决

迁移是学习者理解或识别新旧知识之间的关联性后产生的已有知识在新学习中的应用[2]. 学习的主要目的就是迁移，学习者对新旧知识之间的理解深度直接影响了迁移的效果. 之前，学生已具备研究几何体外接球问题的基本活动经验，也能够深度理解几何体外接球问题的基本原理和基本方法，因此教师可放手让学生自主探究几何体的内切球和截面问题，实现规律迁移、触类旁通.

问题 3　四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 6 的正方形，且 $PA=PB=PC=PD$，若一个半径为 1 的球与此四棱锥所有面都相切，则该四棱锥的高是(　).

A. 6　　B. 5　　C. $\frac{9}{2}$　　D. $\frac{9}{4}$

变式 3　如图 6，在底面边长为 2、高为 3 的正四棱柱中，大球与该正四棱柱的五个面均相切，小球在大球上方且与该正四棱柱的三个面相切，也与大球相切，则小球的半径为______.

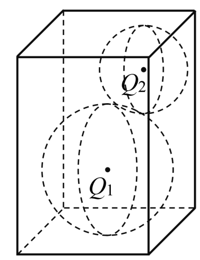


图 6

设计意图　关于几何体的内切球问题，一方面可以让学生借助几何体外接球的研究经验来研究. 问题 3 和变式 3 都可以借助截面法将空间问题转化为平面问题，即用降维思想来处理，这里的关键截面是含球心和切点的截面(图 7、图 8). 另一方面，对于问题 3 还可以运用等体积法求内切球的半径，即 $V_{P\text{-}ABCD}=V_{O\text{-}ABCD}+V_{O\text{-}PAB}+V_{O\text{-}PBC}+V_{O\text{-}PCD}+V_{O\text{-}PDA}=\frac{1}{3}S_{表}\cdot r$. 对于变式 3，也可以建立空间直角坐标系求球心的坐标，进而将几何问题转化为代数问题.

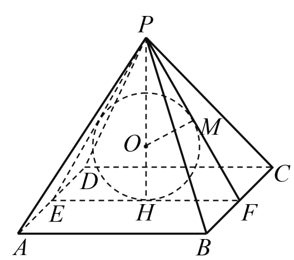


图 7

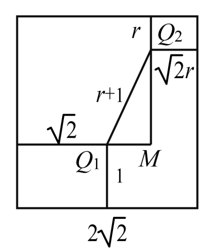


图 8

问题 4　(2020 年山东高考第 16 题)已知直四棱柱 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长均为 2，$\angle BAD=60°$. 以 D_1 为球心、$\sqrt{5}$ 为半径的球面与侧面 BCC_1B_1 的交线长为______.

设计意图　让学生借助几何体外接球的研究经验来研究几何体的截面问题. 利用球的截面性质可知，球面与侧面 BCC_1B_1 的交线为圆或圆弧，其圆心为球心 D_1 在侧面 BCC_1B_1 的射影，即线段 B_1C_1 的中点 M(图 9). 设截面圆或圆弧的半径为 r，则 $r^2+D_1M^2=(\sqrt{5})^2$，即 $r=\sqrt{2}$. 在侧面 BCC_1B_1 中，$\angle EMF=\frac{\pi}{2}$，球面与侧面 BCC_1B_1 的交线为 $\overset{\frown}{EF}$，长

为$\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$.

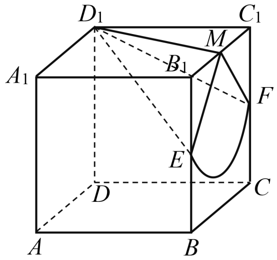


图 9

1.5　整体感悟，思维提升

在高三教学中，教师要尽可能地拓宽学生的思维空间，对学生思维经验进行梳理、完善、建构，使其知识、方法、思想变得有秩序、有层次、有系统，以便形成结构化思维，让学习深度发生.

问题 5　本节课你收获了哪些基本知识？哪些基本方法？哪些基本思想？哪些基本活动经验？

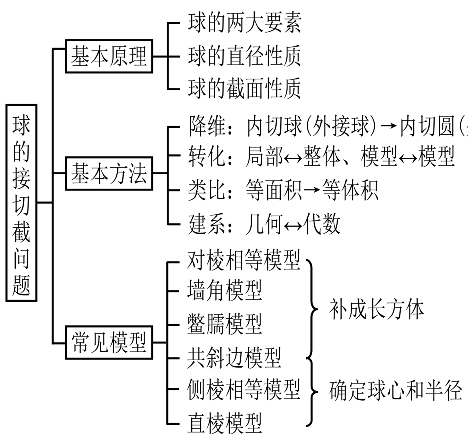


图 10

设计意图　教师在学生畅所欲言中逐层显现思维结构图，使其在大脑中把与球有关的接、切、截问题的基本原理、基本方法和常见模型逐步建立起来，真正实现“深度学习、发展素养”.

2　教学反思

深度学习是以学生为主体，以深层思维为主要认知活动，追求问题探究的深度性、追求思维品质的深刻性与批判性、追求情感投入的深沉性，以师生协作、共享、补充等行为获得对数学知识本质的理解及运用的学习活动.因此，在高三复习中要切实有效提高学生参与的自主性与深度性，激发学生内在的学习动机，使高阶思维贯彻教学的始终.

2.1　注重整合建构，促进学生深度探究

“深度学习实质上是结构性与非结构性知识意义的建构过程，也是复杂的信息加工过程，须对已激活的先期知识和新知识进行有效和精细的深度加工，因此教学中需关注知识的整体性，促进学生的加工与建构.”[3] 本节课不仅从知识内部整合了与球有关的组合体问题，还从方法层面统整了解决与球有关组合体问题的研究方法，使学生在问题解决的体验中建立完整的知识与方法体系，并形成学科观念及学科思维统领下的多维度视角.

2.2　聚焦问题驱动，引导学生深度参与

深度学习强调对数学知识本质的理解和对概念深层知识的掌握与运用，追求有效的学习迁移和问题解决，要求学生在深度理解的基础上做到举一反三，将知识方法迁移到陌生情境中解决新的问题.而实现知识方法迁移的关键是对问题进行深入分析，这就要求教师根据知识内容和学生思维水平创设合适的问题.本节课一共涉及 5 个问题、3 个变式和 3 个探究，用阶梯式的驱动型问题层层深入，通过真实的问题活动体验引导学生深度参与，挖掘知识本质，提升高阶思维能力.

2.3　创设认知冲突，推动学生深度思考

模型的识别与建构是立体几何教学的关键内容.学生对数学问题进行分析、推理、整合，构建认知模型，再将模型在新的问题中迁移运用并适时加以修正和完善，促使学生对知识体系的理解更加系统、逻辑结构更加清晰，最终达到深度学习的效果.本节课在学生已经掌握了几何体外接球问题的基础上，放手让学生自主研究几何体内切球和截面问题，使学生可以迁移外接球问题的研究方法来解决新的问题.然而，学生对新的问题是否具有独到的研究手段呢？这就需要教师在认知冲突的引领下，启发学生的思维，让他们生成深度思考，完善思维结构.

2.4　构建思维导图，助力学生深度学习

借助思维导图教学，可以让隐性的思维变外化显现、抽象的思维变形象可视、零散的思维变整体有结构[4].本节课中教师将与球有关的接、切、截问题用思维导图呈现出来，能更准确地把握学生思维的走向和水平，促使其认识知识的本质，理清方法间的逻辑关联，助力深度学习.

总之，高三专题复习教学中，教师要精心拟定教学策略，努力创造有趣味、有思考、有深度的高效课堂，培育出真正会思考、善分析、有深度思维的优秀学生，从而提高高三复习效益.

参考文献

[1]　中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)[M].北京：人民教育出版社，2020：前言 5.

[2]　曹宝龙.学习与迁移[M].杭州：浙江教育出版社，2019：28.

[3]　宋建辉.指向深度学习的高三复习教学策略——以 2022 年新高考全国Ⅰ卷数学试题第 17 题为例[J].福建基础教育研究，2023(1)：52-54.

[4]　陆丽.借助思维可视导引　优化高三复习效果[J].中学数学月刊，2021(11)：31-34.