几何探路 方程为介

——对一道求角的最值模考题的探究

山东省日照实验高级中学 邹 青 （邮编：638400）

摘 要 文章以一道模考求角的最值问题为例，结合变式探究从几何和代数两大角度总结了求角的最值的常用解题思路和方法，对解三角形中的求最值问题起到补充和借鉴意义.

关键词 解三角形；最值；几何法；代数法

本文探究例题选自 2022 年 11 月份日照市模拟考试第 17 题，平均分 2.3 分，得分情况不理想. 例题考查的数学知识有平面向量的分解、正弦定理、余弦定理、解三角形；主要考查计算求解能力、直观想象能力和逻辑推理能力. 题干表述将几何与代数联系在一起，第一问入口宽，解决问题的思维方法可以是几何的，也可以是代数的，给不同思维水平的同学提供了充分的发挥空间. 第二问从学生答卷反馈来看，众多同学不知道如何求解角的最大值，没有找到有效的解题思路，第二问空白答卷非常多. 通过本例探究求角的最值的一般性方法，结合变式探究拓宽视野，发散思维.

1 试题呈现

例 1 在$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对应的边分别为 a，b，c，点 D 满足 $3\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$，且$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

(1)若 $b=c$，求 A 的值；(2)求 B 的最大值.

2 解法探究

解析 角度一 向量法

因为$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以$(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即$(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AC}=0$，所以$\frac{2}{3}bc\cos A+\frac{1}{3}b^2=0$，又因为 $b=c$，所以 $\cos A=-\frac{1}{2}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

角度二 坐标法

以 A 为坐标原点，建立如图 1 所示平面直角坐标系，则 $B(-\frac{b}{2},b\sin\angle BAD)$，所以 $\sin\angle ABI=\frac{BI}{AB}=\frac{1}{2}$，所以$\angle ABI=\frac{\pi}{6}$.

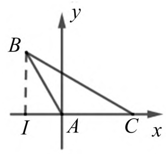

图 1

角度三 几何法

法一 过点 B 作 AC 平行线交 AD 延长线于点 E，如图 2，则 $\mathrm{Rt}\triangle ADC\backsim\mathrm{Rt}\triangle EDB$，所以 $BD=\frac{b}{2}$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$\sin\angle BAE=\frac{BE}{AB}=\frac{1}{2}$，所以$\angle BAE=\frac{\pi}{6}$. 所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

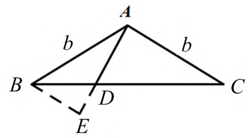

图 2

法二 过点 D 作 AC 平行线交 AB 于点 F，则 $DF=\frac{1}{3}b$，$AF=\frac{2}{3}b$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，所以$\angle FAD=\frac{\pi}{6}$.

法三 取 CD 中点 G，则 $AE=DE=EC=BD=m$，所以$\angle B=\angle C=\angle CAE$，所以$\triangle ABD\cong\triangle ACE$，

设$\angle BAD=\angle EAC=\alpha$，所以 $6\alpha=\pi$，即 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

法四 取 BC 的中点 H，则有 $\mathrm{Rt}\triangle CAH\backsim\mathrm{Rt}\triangle CDA$（或由射影定理），

所以$\frac{AC}{CH}=\frac{CD}{AC}$，解得 $b=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，在$\triangle ABC$ 中，$\cos A=\frac{b^2+b^2-a^2}{2b^2}=-\frac{1}{2}$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

角度四 方程思想之正弦定理算两次

在$\triangle ABD$ 中，$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即$\frac{\frac{a}{3}}{\sin\angle BAD}=\frac{b}{\sin\angle ADB}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\sin\angle ADC=\frac{AC}{DC}=\frac{b}{\frac{2a}{3}}$，因为 $\sin\angle ADB=$

$\sin\angle ADC$，联立解得 $\sin\angle ADB=\frac{1}{2}$，$\angle BAD=\frac{\pi}{6}$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$.

角度五　方程思想之余弦定理算两次

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 中，$\cos C=\frac{b}{\frac{2a}{3}}$；在$\triangle ABC$ 中，$\cos C=\frac{a^2+b^2-b^2}{2ab}=\frac{a}{2b}$，所以$\frac{a}{2b}=\frac{3b}{2a}$，即 $a=\sqrt{3}b$，下同解法四.

点评　第一问短小简明，便于学生多角度切入，要求学生读懂向量语言，可以直接采用向量基底法，该方法最为便捷；建立平面直角坐标系，坐标化求解；从条件 $b=c$ 出发，所以可以借助等腰三角形的特殊性质数形结合求解；在等腰三角形中深入考查学生对解三角形知识的理解水平，和灵活运用知识解决问题的能力，利用“算两次”的思想，具体结合两次正弦定理或者两次余弦定理联立解方程，方程视角相对平面向量视角和坐标法视角计算过程相对繁琐，但也是需要学生掌握的通性通法.

(2)**角度一**　几何轨迹

如图 3，取 CD 中点 E，因为 $AD\perp DC$，所以点 A 的轨迹是以 CD 为直径的圆，所以当直线 AB 与圆 E 相切时，$\angle ABC$ 最大，又因为 BD 的长等于圆的半径，所以此时 B 为30°.

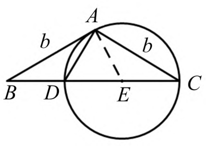

图 3

角度二　余弦定理与重要不等式

因为$\frac{2}{3}bc\cos A+\frac{1}{3}b^2=0$，所以 $2b^2+c^2-a^2=0$，所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\frac{a^2}{2}+\frac{3c^2}{2}}{2ac}\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $a=\sqrt{3}c$ 时等号成立，因为 $0<B<\pi$，所以 B 的最大值为30°.

角度三　等面积法与函数思想

设 $BD=m$，$\angle ADB=\beta$，在$\triangle ABD$ 中，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\beta=(8\cos^2\beta+1)m^2$，又因为 $S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ABC}$，所以$\frac{1}{2}AB\cdot m\sin B+\frac{1}{2}2m\sin\beta\cdot 2m\cos\beta=\frac{1}{2}AB\cdot 3m\sin B$，化简得 $AB\cdot\sin B=m\sin 2\beta$，所以 $\sin B=\frac{m\sin 2\beta}{m\sqrt{8\cos^2\beta+1}}=\frac{\sin 2\beta}{\sqrt{8\cos^2\beta+1}}=\frac{\sin 2\beta}{\sqrt{4\cos 2\beta+5}}=\sqrt{\frac{1-\cos^2 2\beta}{4\cos 2\beta+5}}$，令 $t=4\cos 2\beta+5$，$t\in[1,5]$，则 $\sin B=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{-t^2+10t-9}{t}}=\frac{1}{4}\sqrt{10-(t+\frac{9}{t})}$，由 $y=t+\frac{9}{t}\in[6,10]$，得 $\sin B\in[0,\frac{1}{2}]$，又因为 B 为锐角，所以 B 的最大值为$\frac{\pi}{6}$.

点评　首先借助几何图形分析边角要素关系，以正、余弦定理为主要工具，从代数和几何两大视角寻求解题思路. 几何角度寻求点的轨迹，将角的最值问题转化为圆外一定点与圆心所成定直线与该圆外定点与圆上动点所成的动直线的最大夹角问题，解法小巧灵活. 代数角度可以考虑表达出角的正弦或角的余弦的解析式，求角的正弦的难点在于表达出角的正弦的解析式，涉及角的恒等变换，对于学生运算能力要求较高，结合重要不等式求角的余弦更为常规，是解决求角的最值的通性通法. 几何法运算量最小，但是对于思维要求最高. 本题多角度、多层次地考查学生的数学能力，突出考查了推理论证能力、几何直观能力、探究能力、分析问题和解决问题的能力.

3　变式探究

变式 1　(2023 年济南二模第 20 题)已知$\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对应的边分别为 a，b，c，点 G 是$\triangle ABC$ 的重心，且$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BG}=0$.

(1)若$\angle GAB=\frac{\pi}{6}$，求 $\tan\angle GAC$ 的值；

(2)求 $\cos\angle ACB$ 的取值范围.

解析　(1)解法一 正弦定理

延长 CG 交 AB 于点 E，因为点 G 是$\triangle ABC$ 的重心，所以 E 是 AB 的中点，设 $CG=2m$，$\angle CAG=\alpha$，则 $DG=\frac{1}{2}CG=m$，则在 $\mathrm{Rt}\triangle AGB$ 中，$AG=\sqrt{3}m$，$AB=2m$，所以在$\triangle AGC$ 中，由正弦定理得$\frac{AG}{\sin\angle ACG}=\frac{CG}{\sin\angle CAG}$，

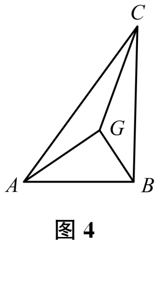

图 4

即$\dfrac{\sqrt{3}m}{\sin(\frac{\pi}{6}-\alpha)}=\dfrac{2m}{\sin\alpha}$，所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$，即 $\tan\angle GAC=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

解法二　余弦定理

延长CG交AB于点E,因为点G是$\triangle ABC$的重心,所以E是AB的中点,设$CG=2m$,则$DG=AD=BD=m$,$AG=\sqrt{3}m$,$AB=2m$,所以$\angle DGA=\angle DAG=30^\circ$,所以$\angle AGC=150^\circ$,所以在$\triangle AGC$中,$AC^2=AG^2+CG^2-2AG\cdot CG\cos\angle AGC=13m^2$,所以$AC=\sqrt{13}m$.

由余弦定理可求得$\cos\angle GAC=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$,所以$\tan\angle GAC=\dfrac{\sin\angle GAC}{\cos\angle GAC}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

解法三　几何法

延长BG交AC于点D,设$BG=2m$,则$DG=m$,则$AG=2\sqrt{3}m$,则在$\mathrm{Rt}\triangle ADG$中,$\tan\angle DAG=\dfrac{DG}{AG}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

解法四　坐标法

如图5所示建系,由题意得GE所在直线为$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$,设$CG=2$,所以$A(\sqrt{3},0)$,$C(-\sqrt{3},-1)$,所以$\tan\angle CAG=k_{AC}=\dfrac{0-(-1)}{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

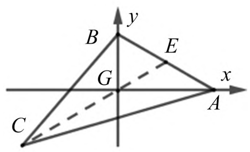

图5

解法五　向量基底法

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}$,且$\overrightarrow{GC}=-(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA})$,所以$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$,$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AG}\cdot(2\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB})=2\overrightarrow{AG}^2$,

设$CG=2$,则$BG=1$,$AG=\sqrt{3}$,则$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{4\overrightarrow{AG}^2+\overrightarrow{GB}^2-4\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{GB}}=\sqrt{13}$,所以$\cos\langle\overrightarrow{AG},\overrightarrow{AC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{2\overrightarrow{AG}2}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{2AG}{AC}=\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$.下同法二.

点评　本题依托平面向量的线性运算和向量数量积的性质围绕三角形重心的性质考查求角问题,由于重心G与三角形各顶点连接又能构成三个三角形,并且$AG\perp BG$,条件突破口较多,充分彰显了向量在解题中的桥梁作用,直接利用向量基底运算,或者建立平面直角坐标系将求夹角问题转化为斜率相关问题,又或者可以分析几何图形结合正弦定理或余弦定理求解,考查学生思维的灵活性,能展现不同层次学生的数学素养,对于学生思维能力要求较高.

(2)**解法一**　算两次

延长CG交AB于点E,则$CE=\dfrac{3}{2}c$,在$\triangle AEC$中,$b^2=\dfrac{c^2}{4}+\dfrac{9c^2}{4}-2\,\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{3c}{2}\cos\angle AEC=\dfrac{5c^2}{2}-\dfrac{3c^2}{2}\cos\angle AEC$,在$\triangle BEC$中,$a^2=\dfrac{c^2}{4}+\dfrac{9c^2}{4}-2\,\dfrac{c}{2}\cdot\dfrac{3c}{2}\cos\angle BEC=\dfrac{5c^2}{2}-\dfrac{3c^2}{2}\cos\angle BEC$,两式相加得$a^2+b^2=5c^2$,在$\triangle ABC$中,$\cos\angle ACB=\dfrac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\dfrac{2(a^2+b^2)}{5ab}\geqslant\dfrac{4}{5}$.当且仅当$a=b$时等号成立,又$\angle ACB\in(0,\dfrac{\pi}{2})$,则$\cos\angle ACB<1$,故$\cos\angle ACB$的取值范围为$[\dfrac{4}{5},1)$.

解法二　向量基底法

因为$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BC}=(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB})\cdot(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB})=0$,所以$2\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}^2=0$,即$2c^2-b^2+bc\cos A=0$,结合余弦定理化简得$a^2+b^2=5c^2$,以下同法一.

解法三　向量法

延长CG交AB于点E,因为$\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CE}$,$\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AB}$,所以$(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})^2=(2\overrightarrow{CE})^2$①,$(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})^2=\overrightarrow{BA}^2$②,将①②相加得$a^2+b^2=5c^2$.

解法四　轨迹法

因为$BG\perp AG$,所以点G在以AB为直径的圆O上,设$AB=2$,则$OG=1$,$OG=3$,由于当G落在AB的中垂线上时,$\triangle ABC$的面积取得最大值,即$\tan\angle ACB$取得最大值,此时$\angle ACB$取得最大值,所以$\cos\angle ACB$取得最小值,所以$\cos\angle ACB=2\cos^2\angle AOC-1=\dfrac{4}{5}$.

点评　将 A、B 视为定点，可知点 G 的轨迹是圆，利用数形结合容易判断 G 落在 AB 的中垂线上时 $\triangle ABG$ 的面积取得最大值，由于 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ABG}$，因此 $\triangle ABC$ 面积也取得最大值，

$$S=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2C}=\frac{1}{2}ab\sqrt{1-(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab})^2}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(\frac{1}{\cos^2C}-1)(a^2+b^2-c^2)^2}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{\tan^2C(a^2+b^2-c^2)^2}.$$

因为 AB 的中线长 $m_c^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$，所以 $S=\frac{1}{4}\sqrt{\tan^2C(2m_c^2-\frac{c^2}{2})^2}=\frac{1}{8}|(4m_c^2-c^2)\tan C|$，代入 $c=AB=2$，$m_c=OC=3$，得 $S=4\tan C$，本题易知 C 为锐角，所以当 $\triangle ABC$ 面积取得最大值，角 C 取得最大值. 在广泛掌握各种三角形面积公式的基础上以形显数，求角最值问题运算简洁明了.

解法五　轨迹法之米勒圆

延长 BG 交 BC 于点 D，过点 C 向 BD 延长线作垂线于点 M. 因为 G 为重心，所以 D 为 AC 中点，不妨将 B，D 看作定点，由于 $BG\perp AG$，所以 $AG\parallel MC$，所以点 C 在定直线 MC 上运动，由米勒圆知当且仅当过 B，D 作圆与直线 MC 相切于点 C 时，$\angle ACB$ 最大. 由于 $MC^2=MD\cdot MB$，所以 $MC=2MD$，所以 $\tan\angle MCD=\frac{1}{2}$，$\tan\angle MCB=2$，所以 $\tan\angle ACB=\frac{\tan\angle MCB-\tan\angle MCD}{1+\tan\angle MCB\cdot\tan\angle MCD}=\frac{3}{4}$，所以 $\cos\angle ACB=\frac{4}{5}$，所以 $\angle ACB\in(0,\frac{\pi}{6}]$

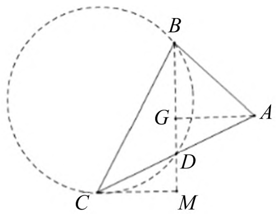

图 6

点评　由于 D 为 AC 的中点，将 $\angle ACB$ 视作 $\angle DCB$，再将 B，D 看成定点，即求两定点到直线上动点所成角的最值问题，即为米勒圆问题. 本问要求学生能灵活运用知识迁移，注重对数形结合、转化与化归、整体代换与方程等思想方法进行考查，对学生逻辑推理、数学运算、直观想象等素养要求高.

加强条件　在锐角 $\triangle ABC$ 中，求 $\cos\angle ACB$ 的取值范围.

解析　因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$\begin{cases}b^2+c^2-a^2>0,\\a^2+c^2-b^2>0,\end{cases}$ 将 $a^2+b^2=5c^2$ 代入解得 $\frac{\sqrt{6}}{3}<\frac{a}{b}<\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以 $\cos\angle ACB=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2}{5}(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})\in[\frac{4}{5},\frac{\sqrt{6}}{3})$.

换设问　若 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 3，求 c.

解析　由于 $a^2+b^2=5c^2$，$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{2}{5}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab}\geqslant\frac{4}{5}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}\leqslant\frac{3}{5}$，所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C\leqslant\frac{3}{10}ab=3$，即 $ab=10$，此时 $a=b=\sqrt{10}$，代入 $a^2+b^2=5c^2$ 得 $c=2$.

变式 2　（2022 年天津第 14 题）在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{CA}=a$，$\overrightarrow{CB}=b$，D 是 AC 的中点，$\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{BE}$，若 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{DE}$，则 $\angle ACB$ 的最大值为______.

变式 3　（2014 年江苏第 14 题）若 $\triangle ABC$ 中的内角满足 $\sin A+\sqrt{2}\sin B=2\sin C$，则 $\cos C$ 的最小值是______.

变式 4　（2016 年全国高中数学联赛 A 卷一试第 9 题）在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}$，求 $\sin C$ 的最大值.

4　结语

三角形中求角的最值和取值范围问题需要引起教学的重视，引导学生从几何和代数两大角度加以探究，在探究时既注重纵深探究，也注重横向联系，求角的最值问题与面积最值问题密切相关，引导学生总结求最值问题的思维导图，解题时做到有法可依，思路明晰.

（收稿日期：2023-10-11）