“爪形”三角形的常用解法

曹贤鸣，林雅闻

（台州第一中学，浙江 台州 318000）

三角形中的一个顶点与对边上一点连线得到的图形通常叫做“爪形”三角形. 近两年，2021年新高考卷Ⅰ，2022年全国甲卷考查了“爪形”三角形，2023年在新高考卷Ⅰ、新高考卷Ⅱ、全国甲卷理科和全国乙卷理科都考查了“爪形”三角形，这种题型已成为全国高考数学卷中的热点. 从单一的三角形到“爪形”三角形，解三角形的题目也随之从单一到复合，突出对正弦定理、余弦定理、三角形面积公式以及三角恒等变换等基础内容的考查；与平面几何内容的综合，增强了考查的综合性. 虽然考查难度虽仍属中等，但综合性变强，求解方法更加灵活多样. 下面介绍求解此类问题的常见思路与方法.

1 局部可解的“爪形”三角形的求解方法

“爪形”三角形中有三个三角形，当其中一个三角形可解时，就可以此三角形为解题切入口，利用正弦定理、余弦定理进行化边或者化角，瞄准求解目标，在可解的三角形中求出后续所需要的边或角，进而求解.

题1 （2023年全国高考乙卷理科）在$\triangle ABC$中，已知$\angle BAC=120°$，$AB=2$，$AC=1$.

（1）求$\sin\angle ABC$；

（2）若D为BC上一点，且$\angle BAD=90°$，求$\triangle ADC$的面积.

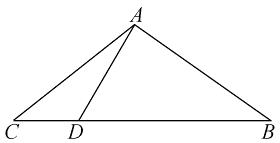

图1-1

分析与解 （1）由$\angle BAC=120°$，$AB=2$，$AC=1$，知$\triangle ABC$可解.

在$\triangle ABC$中由余弦定理求得$BC=\sqrt{7}$，$\cos B=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，

求得$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

（2）在$\triangle ADC$中，$\angle CAD=30°$，$AC=1$，要求$\triangle ADC$的面积只要求出AD. AD是$\triangle ADC$与$\triangle ADB$的公共边，而且在可解的$\triangle ABC$中可以求得$\angle ABC$或者$\angle ACB$，这样$\triangle ADC$与$\triangle ADB$都变成可解了.

比较两个三角形，第（1）题已求得$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，且$\angle BAD=90°$，所以在$\triangle ADB$中求解时运算更合理.

由（1）中的$\cos B=\dfrac{5\sqrt{7}}{14}$，$\sin\angle ABC=\dfrac{\sqrt{21}}{14}$，得$\tan\angle ABC=\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

在直角$\triangle ADB$中，

$AD=AB\tan\angle ABC=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{5}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$，

因此$S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\sin\angle CAD=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{2\sqrt{3}}{5}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{10}$.

题2 （2023年全国新高考Ⅱ）记$\triangle ABC$的内角A，B，C的对边分别为a，b，c，已知$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，D为BC中点，且$AD=1$.

（1）若$\angle ADC=\dfrac{\pi}{3}$，求$\tan B$.

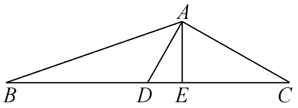

图 1-2

分析与解 题设中有$\triangle ADC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$且$AD=1$可知组成“爪形”三角形中的$\triangle ADC$可解.

由$\angle ADC=\frac{\pi}{3}$且$AD=1$，

所以DC边上的高$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$\triangle ADC$中有$\triangle ADC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以$DC=\frac{2S_{\triangle ADC}}{AE}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2$.

所以在$\triangle ABD$中，$\angle ADB=\frac{2\pi}{3}$，$BD=2$，$AD=1$，此时$\triangle ABD$可解.

在$\triangle ABD$中，由余弦定理得

$c^2=BD^2+AD^2-2BD\cdot AD\cos\angle ADB$，

即$c^2=4+1-2\times2\times1\times(-\frac{1}{2})=7$，

解得$c=\sqrt{7}$.

再由正弦定理$\frac{AD}{\sin\angle B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$得

$$\sin\angle B=\frac{AD\ \sin\angle ADB}{AB}=\frac{1\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14},$$

所以$\tan B=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

另解 如果利用直角$\triangle ABE$，那么运算更简洁. $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{7-\frac{3}{4}}=\frac{5}{2}$，所以$\tan B=\frac{AE}{BE}=\frac{\sqrt{3}}{5}$.

2023年全国新高考卷中Ⅰ、甲卷理科的解三角形题也属于此类问题，

题3 （2023年全国新高考Ⅰ）已知在$\triangle ABC$中，$A+B=3C$，$2\sin(A-C)=\sin B$.

(1)求$\sin A$；

(2)设$AB=5$，求AB边上的高.

题4 （2023年全国高考甲卷理科）在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=60^\circ$，$AB=2$，$BC=\sqrt{6}$，$\angle BAC$的角平分线交BC于D，则AD=________.

2023年全国高考题中涉及到“爪形”三角形题，解题途径较多，如果能灵活运用正弦定理、余弦定理这些基本内容进行边角互化，求解思路自然、流畅.

2 局部不可解的“爪形”三角形的求解方法

“爪形”三角形中的三个三角形都不能直接求解时，可以寻找各个三角形中的边、角或者面积之间的等量关系，利用等式构造方程或者函数求解.

题2(续) （2023年全国新高考Ⅱ）记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，D为BC中点，且$AD=1$.

(2)若$b^2+c^2=8$，求b,c.

分析 求解：如图1-2，题中的三个三角形都不能直接求解，D为BC中点，易找到等式$\angle ADC+\angle ADB=180^\circ$，进而有$\cos\angle ADC+\cos\angle ADB=0$.

设$BD=CD=x$，由分别在两个三角形中利用余弦定理得

$$\frac{1+x^2-c^2}{2\times1\times x}+\frac{1+x^2-b^2}{2\times1\times x}=0,$$

即$2+2x^2=c^2+b^2=8$，所以$x=\sqrt{3}$.

$\triangle ADC$中有$\triangle ADC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$DC=\sqrt{3}$且$AD=1$，此时$\triangle ADC$可解，所以在$\triangle ADC$中有$\sin\angle ADC=\frac{2S_{\triangle ADC}}{AD\cdot DC}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$，所以$\angle ADC=90^\circ$，由等腰三角形性质知$b=c=\sqrt{AD^2+CD^2}=2$.

高考园地

题 5 （高三模拟题）在$\triangle ABC$中，已知$\tan A=\frac{12}{5}$，D为BC上一点，$AD=3\sqrt{2}$，$\angle DAB=45^\circ$，求$\triangle ABC$的面积的最小值.

分析 题中的三个三角形都不能直接求解，需要寻找各个三角形之间的等量关系，仿上题有$\cos\angle ADC+\cos\angle ADB=0$，

设$DC=x$，$BD=y$，

则$\frac{18+x^2-b^2}{2\times 3\sqrt{2}\times x}+\frac{18+y^2-c^2}{2\times 3\sqrt{2}\times y}=0$，

又由余弦定理有

$y^2=18+c^2-2\times 3\sqrt{2}c\cdot\cos 45^\circ$，

$(x+y)^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\angle BAC$，

已知$\tan A=\frac{12}{5}$，所以三个等式中有四个未知数，消元后保留一个未知数，建立目标函数，利用函数方法求解. 但消元时运算量较大，换一个角度，寻找图中边或者面积的等量关系求解.

解一 （利用边的关系寻找等式）

由$\tan A=\frac{12}{5}$知$\sin\angle CAB=\frac{12}{13}$，

$\cos\angle CAB=\frac{5}{13}$.

所以$\sin\angle DAC=\sin(\angle CAB-45^\circ)=\frac{12}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{5}{13}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{26}$，

设$\angle ADC=\theta$，记三角形中$AB=c$，$AC=b$.

在$\triangle ADC$中，$\frac{\sin\angle CAD}{DC}=\frac{\sin\angle ADC}{b}$，

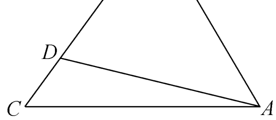

图 2-1

在$\triangle ADB$中，$\frac{\sin\angle BAD}{BD}=\frac{\sin\angle ADB}{c}$，

又$\sin\angle ADC=\sin\angle ADB=\sin\theta$，所以

$DC=\frac{b\sin\angle CAD}{\sin\theta}=\frac{7\sqrt{2}b}{26\sin\theta}$，

$BD=\frac{c\sin\angle BAD}{\sin\theta}=\frac{\sqrt{2}c}{2\sin\theta}$，

又$\frac{1}{2}bc\sin\angle CAB=\frac{1}{2}BC\times AD\sin\theta$，

则$BC=\frac{2\sqrt{2}bc}{13\sin\theta}$，

所以由$BC=DC+BD$，

得$\frac{2\sqrt{2}bc}{13\sin\theta}=\frac{7\sqrt{2}b}{26\sin\theta}+\frac{\sqrt{2}c}{2\sin\theta}$，

即$4bc=7b+13c$.

$4bc=7b+13c\geqslant 2\sqrt{7b\cdot 13c}$，$bc\geqslant\frac{7\times 13}{4}$，

当且仅当$\begin{cases}4bc=7b+13c,\\7b=13c\end{cases}$即$\begin{cases}b=\frac{13}{2},\\c=\frac{7}{2}\end{cases}$时，

$\triangle ABC$的面积的最小值$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin\angle CAB=\frac{6}{13}bc\geqslant\frac{6}{13}\times\frac{7\times 13}{4}=\frac{21}{2}$.

解二 （利用面积的关系寻找等式）

$S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=S_{\triangle ABC}$，

$\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}b\times\frac{7\sqrt{2}}{26}+\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}c\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\cdot bc\times\frac{12}{13}$，

即$7b+13c=4bc$，下同上面求解.

说明 在得到$4bc=7b+13c$后，如果利用$b=\frac{13c}{4c-7}$进行消元后建立目标函数，那么后续求解要用到导数方法，运算比较繁琐.

（责审 高雪松）

中学生数学