以核心素养为导向的高中数学试题命制的实践与思考

—— 以一道以“隐圆”为背景的解三角形多选题的命制为例

广东省佛山市第一中学 (528000) 王彩凤

摘要 本文以一道以“隐圆”为背景的解三角形多选题的命制为例, 介绍以核心素养为导向的高中数学试题命制的步骤与策略, 立足于高考试题研究, 阐述了命题的构思、试题命制的过程、试题的评价分析. 试题的题干表述清晰简洁, 蕴含了丰富的主干知识和思想方法, 且可从多个角度进行解题, 鼓励思维创新, 注重对关键能力和核心素养的考查, 符合新课程标准的命题要求, 并进行了命题的反思, 一道高质量的题对教师的教学及学生的学习均具有良好的导向作用.

关键词 高中数学; 核心素养; 试题命制; 解三角形; 辅助圆

数学学科核心素养包括数学抽象、逻辑推理、数学建模、直观想象、数学运算和数据分析, 是思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观的综合体现, 是在数学的学习和应用过程中逐步形成和发展的[1]. 为发展学生的核心素养, 教师需要引导学生去理解数学知识的本质, 提高应用意识, 而不是让学生机械地背诵知识和解题方法. 高质量的试题会具有较强的导向性, 所以, 数学试题的命制应以核心素养为导向, 关注数学的本质, 考查学生的能力和核心素养. 笔者在参加“命题・评题・品题”比赛中, 命制了一道以“隐圆”为背景的解三角形多选题, 命题过程印象深刻, 获益匪浅. 本文以此题的命制为例, 谈谈以核心素养为导向的高中数学试题命制的步骤与策略.

1 命题构思

1.1 明确要求

解三角形与“隐圆”知识之间存在密切联系, 命制的解三角形多选题以“隐圆”为背景, 围绕三角形的边、角、面积等元素设计问题, 题干力求简洁, 考查正弦定理、余弦定理、基本不等式、平面向量、圆等相关知识. 试题的求解突出强调学生对三角形和圆的基础知识、基本方法的深入理解和灵活应用, 难度为中档偏难.

1.2 命题立意

依据新课程标准的要求, 数学试题的考查内容不仅要聚焦学生对重要数学概念、定理、方法、思想的理解和应用, 还应适度增加试题的思维量, 发挥人才选拔功能[1]. 以“隐圆”为背景的解三角形多选题的命制, 注重考查学生综合应用知识的能力, 要求学生能突破原有思维的禁锢, 挖掘题目中变与不变的量, 创新性地解决问题. 试题考查了转化与化归、函数与方程等数学思想方法, 考查了学生的直观想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力、创新能力等关键能力, 考查了直观想象、逻辑推理、数学运算等核心素养, 体现基础性、综合性和创新性的考查要求.

2 试题的命制过程

2.1 设计思路

以“隐圆”为背景的解三角形试题的命制, 拟以多三角形组合的模型作为研究的载体, 围绕三角形的边、角、面积等元素设计题目条件和问题. 解答者既可以利用正弦定理解三角形, 也可以借助题目中定长、定角条件构造辅助圆, 创新性地解决问题.

2.2 选材研究

根据设计思路, 笔者重点研究了 2020 年新高考数学全国 II 卷第 17 题, 并以此题为基础进行创作.

原题 (2020 年新高考数学全国 II 卷第 17 题) ΔABC 中, $\sin^2 A-\sin^2 B-\sin^2 C=\sin B\sin C$, (1) 求 A; (2) 若 $BC=3$, 求 ΔABC 周长的最大值.

这道高考题第 (1) 小题结合正弦定理与余弦定理可求得 $A=\dfrac{2\pi}{3}$. 第 (2) 小题的解法 1 是利用余弦定理求出 AB, AC 之间的定量关系, 依据 $AB\cdot AC\leqslant(\dfrac{AB+AC}{2})^2$ 建立关于 $AB+AC$ 的不等式, 求出 $AB+AC$ 的最大值, 进而求出 ΔABC 周长的最大值; 解法 2 是利用正弦定理化边为角, 将周长 $BC+AB+AC$ 转化为 $3+3\cos B+\sqrt{3}\sin B$, 进而利用三角函数的相关知识求解最大值; 解法 3 是关注三角形中边与角的关系, 发现定角 A 的对边 BC 为定值, 依据“同弦所对的圆周角相等或互补”这一性质, 如图 1, 可以构造 ΔABC 的外接圆, 则点 A 为劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上的动点, 当点 A 为劣弧 $\overset{\frown}{BC}$ 上的中点时, ΔABC 的周长最大 (此结论可通过解法 1 得到严格证明) .

解法 1、2 是常规的解题思路, 解法 3 在解答题中应用虽然不够严谨, 但其关注到边角之间存在的联系, 根据定角构造辅助圆这一做法, 若能应用于选择题或者填空题, 则可极大降低运算量, 提高思维量, 又可考查学生的空间想象能力、

创新解决问题的能力. 受此题启发, 笔者以“隐圆”为背景, 命制了一道解三角形多选题.

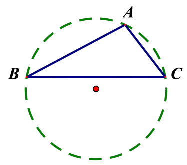

图 1

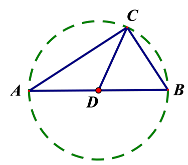

图 2

2.3 联系与搭架

2.3.1 确定三角形模型

命题初步设想, 基于“爪型”三角形模型, 通过设定合适的边角条件, 构造辅助圆, 探求三角形中角度、边长与面积的最值问题. 如图 2, “爪型”三角形之“中线模型”, 可以构造以 D 为圆心, 以 AB 为直径的圆; 如图 3, “爪型”三角形之“角平分线模型”, 可以分别构造 ΔACD 和 ΔBCD 的外接圆; 如图 4, “爪型”三角形之“高模型”, 可以构造 ΔACD 的外接圆.

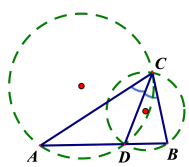

图 3

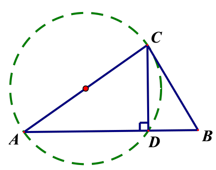

图 4

在以上“爪型”三角形模型中, 均可以“隐圆”为背景设计问题. 但这些设想已经有很多现成的题目, 笔者想在此基础上进一步创新命题, 选择了图 5 的多三角形模型作为命题的基础模型.

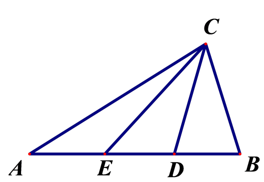

图 5

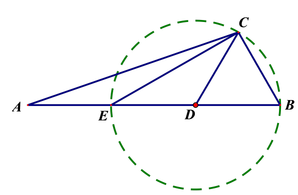

图 6

2.3.2 问题的确定

题干设计为: 如图 5, ΔABC 中, $AB=3\sqrt{3}$, 点 D,E 为 AB 的两个三等分点.

A 选项设计为: 若 $CD=\sqrt{3}$, 则 ΔABC 为钝角三角形. 此选项难度不大, 学生容易发现 B,C,E 三点在以点 D 为圆心的圆上 (图 6) , 可以快速判断选项是否正确, 题目的起点低、入口宽, 增强学生继续往下探索的信心, 考查了学生的数学运算、直观想象能力.

B 选项设计为: 若 $\angle ACD=\frac{\pi}{3}$, 则 ΔABC 的面积最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. 如图 7, 此选项的创新之处在于抓住“$S_{\Delta ABC}=\frac{3}{2}S_{\Delta ACD}$”这一隐含条件设计问题, 学生需要根据此关系将问题转化为求 ΔACD 的面积, 提高了思维量, 考查了学生知识迁移、逻辑推理的能力. 而且此选项存在多种解法, 为不同层次的学生发挥他们的聪明才智提供了用武之地, 有效地提高了试题的区分度.

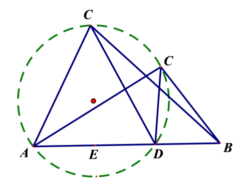

图 7

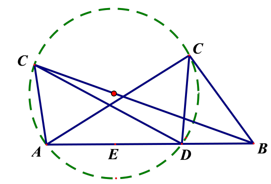

图 8

C 选项设计为: 若 $\angle ACD=\frac{\pi}{3}$ 时, 则 BC 长的最大值为 $\sqrt{31}$. 如图 8, 此题设计背景与 B 选项相同, 其创新之处在于构造辅助圆后, BC 的长可以转化为求圆外一点 B 到圆上的点的距离最大值问题.

D 选项设计为: 若 $\angle ACD=\angle BCE=\frac{\pi}{3}$ 时, 则 $\cos\angle DCE=\frac{\sqrt{13}+3}{8}$. 区别于前三个选项, 此选项的创新做法是可构造两个圆来求解, 有一定的难度, 并且将此选项设置为正确答案, 不会做的学生不一定敢选, 漏选只能得部分的分, 全部选对才可得满分, 有效地提高了试题的区分度.

从 A 到 D 选项, 试题设计简洁新颖, 呈现出入口宽、起点低、坡度缓、尾巴翘的特点, 方法多且具有明显的层次性, 体现“多思少算”的命题理念, 既考查了学生的基础知识、基本思想方法, 又考查了学生的空间想象能力、逻辑推理能力和创新解决问题的能力.

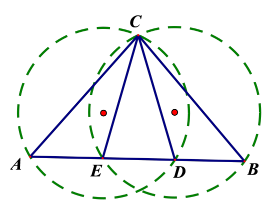

图 9

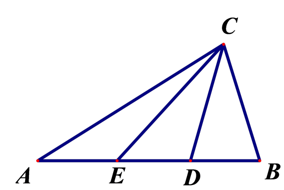

图 10

2.3.3 确定成题

多选题 如图 10, ΔABC 中, $AB=3\sqrt{3}$, 点 D,E 为 AB 的两个三等分点. 以下说法中正确的是 ( ) .

A. 若 $CD=\sqrt{3}$, 则 ΔABC 为钝角三角形.

B. 若 $\angle ACD=\frac{\pi}{3}$, 则 ΔABC 的面积最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

C. 若 $\angle ACD=\frac{\pi}{3}$, 则 BC 长的最大值为 $\sqrt{31}$.

D. 若 $\angle ACD=\angle BCE=\frac{\pi}{3}$, 则 $\cos\angle DCE=\frac{\sqrt{13}+3}{8}$.

参考答案 A, B, D.

2.4 解答分析

2.4.1 思路分析

对于 A 选项, 可用代数法, 利用余弦定理和方程思想求出 AC, BC 之间的关系式, 再代入

$$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}<0,$$

由此判断 ΔABC 为钝角三角形. 也可用几何法, 观察图形发现 $CD=DE=DB$, 则点 C 在以 D 为圆心, 以 BE 为直径的圆上运动 (不与 B,E 重合) , 从图中可以直观地看出 $\angle ACB$ 为钝角.

对于 B 选项, 易得 $S_{\Delta ABC}=\frac{3}{2}S_{\Delta ACD}$, 将问题转化为求 ΔACD 的面积, 第一种解法为利用余弦定理得到关于 AC,CD 的定量关系, 依据 $AC^2+CD^2\geqslant 2AC\cdot CD$ 建立关于 $AC\cdot CD$ 的不等式, 求出 $AC\cdot CD$ 的最大值, 进而求出 ΔACD 面积的最大值; 第二种解法为利用正弦定理化边为角, 将面积最值转化为三角函数的最值问题; 第三种解法是根据定角 $\angle ACD$ 构造 ΔACD 的外接圆, 则点 C 为优弧 $\overset{\frown}{AD}$ 上的动点, 当点 C 为优弧 $\overset{\frown}{AD}$ 的中点时, ΔACD 的面积最大.

对于 C 选项, 利用正弦定理将边化为角, 将 BC 长度的最值转化为三角函数的最值问题; 也可以像 B 选项的解法 3 一样, 根据定角 $\angle ACD$ 构造 ΔACD 的外接圆, 则点 C 为优弧 $\overset{\frown}{AD}$ 上的动点, 当 C 在 BO 的延长线上时, 此时 BC 的长度最大.

对于 D 选项, 第一种解法是分别在 ΔCED 和 ΔACD 中应用正弦定理, 通过共同边 CD 建立方程求解; 第二种解法是根据面积等量关系 $\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CDE}}=2$ 建立方程求解; 第三种解法是根据 ΔABC 的对称性建立平面直角坐标系, 求出 ΔACD 和 ΔBCE 的外接圆方程, 联立两圆方程求出点 C 的坐标, 再应用数量积公式求解 $\cos\angle DCE$.

2.4.2 解法呈现

对于 A 选项, 设 $\angle A,\angle B,\angle ACB$ 所对的边分别为 a,b,c, 有以下两种解法.

解法 1 因为 $AB=3\sqrt{3}$, 点 D,E 为 AB 的两个三等分点, 所以 $AE=DE=BD=\sqrt{3}$. 在 ΔACD 中, 由余弦定理得

$$\cos\angle ADC=\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}.$$

在 ΔBCD 中, 由余弦定理得

$$\cos\angle BDC=\frac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}.$$

由 $\angle ADC+\angle BDC=\pi$ 知 $\cos\angle ADC=-\cos\angle BDC$, 则

$$\frac{AD^2+CD^2-AC^2}{2AD\cdot CD}=-\frac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}.$$

代入数据, 化简得 $b^2=27-2a^2$. 在 ΔABC 中,

$$\cos\angle ACB=\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{2AC\cdot BC}=\frac{b^2+a^2-27}{2ab}=-\frac{a^2}{2ab}<0,$$

所以 $\frac{\pi}{2}<\angle ACB<\pi$, 所以 ΔABC 为钝角三角形, 故 A 正确.

解法 2 因为 $AB=3\sqrt{3}$, 点 D,E 为 AB 的两个三等分点, 所以 $AE=DE=BD=CD=\sqrt{3}$, 所以点 C 在以 D 为圆心, 以 $\sqrt{3}$ 为半径的圆上运动 (不与 B,E 重合) , 如图 11, 则 $\angle ECB=\frac{\pi}{2}$, $\angle ACB=\angle ECB+\angle ACE=\frac{\pi}{2}+\angle ACE>\frac{\pi}{2}$, 所以 ΔABC 为钝角三角形, 故 A 正确.

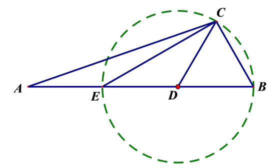

图 11

对于 B 选项, 有以下三种解法.

解法 1 在 ΔACD 中, 由余弦定理 $\cos\angle ACD=\frac{AC^2+CD^2-AD^2}{2AC\cdot CD}=\frac{1}{2}$, 化简得 $AC\cdot CD+12=AC^2+CD^2$, 因为 $AC^2+CD^2\geqslant 2AC\cdot CD$, 所以 $AC\cdot CD\leqslant 12$, 当且仅当 $AC=CD=2\sqrt{3}$ 时等号成立, 所以

$$S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}\times 12=3\sqrt{3}.$$

由 $AD=2DB$ 得 $S_{\Delta ABC}=\frac{3}{2}S_{\Delta ACD}$, 所以 $S_{\Delta ABC}\leqslant\frac{9\sqrt{3}}{2}$, 故 B 正确.

解法 2 在 ΔACD 中, 由正弦定理得

$$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin A}=\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=4,$$

所以 $AC=4\sin(\frac{\pi}{3}+A)$, $CD=4\sin A$, 于是

$$S_{\Delta ACD}=\frac{\sqrt{3}}{4}AC\cdot CD=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot 4\sin(\frac{\pi}{3}+A)\cdot 4\sin A=2\sqrt{3}\sin(2A-\frac{\pi}{6})+\sqrt{3}.$$

因为 $0<A<\frac{2\pi}{3}$, 所以 $-\frac{\pi}{6}<2A-\frac{\pi}{6}<\frac{7\pi}{6}$, 于是, 当 $2A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 时, ΔACD 的面积取得最大值 $3\sqrt{3}$. 由解法 1 知, $S_{\Delta ABC}=\frac{3}{2}S_{\Delta ACD}$, 所以 ΔABC 面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$, 故 B 正确.

解法 3 设 ΔACD 的外接圆半径为 R, 圆心为 O, 则点 C 为优弧 $\overset{\frown}{AD}$ 上的动点, 由 $\angle ACD=\frac{\pi}{3}$, $AD=2\sqrt{3}$, 得 $2R=\frac{AD}{\sin\angle ACD}=4$, 所以 $R=2$. 如图 12, 当 $CE\perp AD$

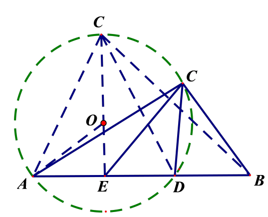

图 12

时, C 到 AD 的距离最大, 且最大值为

$$CE=R+OE=R+\sqrt{R^2-(\frac{AD}{2})^2}=3,$$

所以 ΔACD 的面积最大值为 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times3=3\sqrt{3}$. 因此, ΔABC 的面积的最大值为 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$, 故 B 正确.

对于 C 选项, 有以下两种解法.

解法 1 在 ΔACD 中, 由正弦定理得 $\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{CD}{\sin A}$, 所以 $CD=4\sin A$. 在 ΔBCD 中,

$$\begin{aligned}BC^2=&CD^2+BD^2-2CD\cdot BD\cdot\cos\angle BDC\\=&(4\sin A)^2+3-2\cdot4\sin A\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(\frac{\pi}{3}+A),\end{aligned}$$

化简得 $BC^2=17+4\sqrt{13}\cos(2A+\theta+\frac{\pi}{2})$ (其中 $\sin\theta=\frac{7\sqrt{13}}{26}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{39}}{26}$, 不妨取 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$). 因为 $A\in(0,\frac{2\pi}{3})$, 所以 $2A+\theta+\frac{\pi}{2}\in(\frac{\pi}{2}+\theta,\frac{11\pi}{6}+\theta)$. 又因为 $\tan\theta=\frac{7\sqrt{3}}{3}>1=\tan\frac{\pi}{4}$, 所以 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$, 则

$$\frac{3\pi}{4}<\frac{\pi}{2}+\theta<\pi,\frac{25\pi}{12}<\frac{11\pi}{6}+\theta<\frac{7\pi}{3},$$

由此可知 $2\pi\in(\frac{\pi}{2}+\theta,\frac{11\pi}{6}+\theta)$, 当 $2A+\theta+\frac{\pi}{2}=2\pi$ 时, $\cos(2A+\theta+\frac{\pi}{2})$ 取最大值 1, 所以 $BC^2\leqslant17+4\sqrt{13}=(2+\sqrt{13})^2$, 即 $BC\leqslant2+\sqrt{13}$, 故 C 错误.

解法 2 设 ΔACD 的外接圆半径为 R, 圆心为 O, 则点 C 为优弧 $\overset{\frown}{AD}$ 上的动点, 由 B 选项解法 3 知 $R=2$. 如图 13, 当 BC 经过圆心 O 时, BC 的长最大, 此时 $BC=OC+OB=R+OB$. 在 RtΔBOE 中, $OE=1$, $BE=2\sqrt{3}$, $OB=\sqrt{OE^2+BE^2}=\sqrt{13}$, 所以 BC 的最大值为 $2+\sqrt{13}$, 故 C 错误.

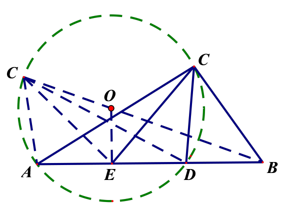

图 13

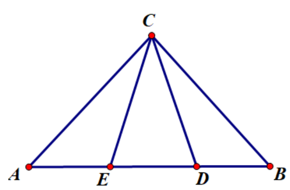

图 14

对于 D 选项, 有以下三种解法.

解法 1 如图 14, 设 $\angle ECD=\theta$, 由对称性知 $CE=CD$, $AC=BC$, 则 $\angle CED=\frac{\pi-\theta}{2}$, $\angle ACE=\frac{\pi}{3}-\theta$, $\angle A=\frac{\pi-\theta}{2}-(\frac{\pi}{3}-\theta)=\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2}$. 在 ΔCED 中, 由 $\frac{ED}{\sin\theta}=\frac{CD}{\sin\angle CED}$, 得 $CD=\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\theta}{2}}$. 在 ΔACD 中, 由 $\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{CD}{\sin A}$, 得 $CD=4\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2})$. 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2\sin\frac{\theta}{2}}=4\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\theta}{2})$, 化简得 $\sin(\theta-\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{4}$. 因为 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$, 所以 $-\frac{\pi}{3}<\theta-\frac{\pi}{3}<0$, 所以 $\cos(\theta-\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{13}}{4}$, 则 $\cos\theta=\cos(\theta-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3})=\frac{\sqrt{13}+3}{8}$, 故 D 正确.

解法 2 易知,

$$\begin{aligned}\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta CDE}}=&\frac{\frac{1}{2}AC\cdot BC\cdot\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}{\frac{1}{2}CE\cdot CD\cdot\sin\theta}\\=&\frac{AC\cdot BC\cdot\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}{CE\cdot CD\cdot\sin\theta}=3,\end{aligned}\quad①$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta CDE}}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}CE\cdot CD\cdot\sin\theta}=\frac{AC\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{CE\cdot\sin\theta}=2,\quad②$$

$$\frac{S_{\Delta BCE}}{S_{\Delta CDE}}=\frac{\frac{1}{2}BC\cdot CE\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}CD\cdot CE\cdot\sin\theta}=\frac{BC\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{CD\cdot\sin\theta}=2.\quad③$$

由①得

$$\frac{AC\cdot BC}{CE\cdot CD}=\frac{3\sin\theta}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}.$$

由②×③得 $\frac{AC\cdot BC\cdot\sin^2\frac{\pi}{3}}{CE\cdot CD\cdot\sin^2\theta}=4$, 则 $\frac{AC\cdot BC}{CE\cdot CD}=\frac{4\sin^2\theta}{\sin^2\frac{\pi}{3}}$, 所以 $\frac{4\sin^2\theta}{\sin^2\frac{\pi}{3}}=\frac{3\sin\theta}{\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)}$, 化简得 $\sin\theta\sin(\frac{2\pi}{3}-\theta)=\frac{9}{16}$, 所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\cos\theta+\frac{1}{2}\sin^2\theta=\frac{9}{16}$, 即 $\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})=\frac{5}{8}$. 由 $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$ 及 $\sin(2\theta-\frac{\pi}{6})>0$, 可得 $2\theta-\frac{\pi}{6}\in(0,\frac{\pi}{2})$, 所以 $\cos(2\theta-\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{39}}{8}$, 从而

$$\cos2\theta=\cos(2\theta-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6})=\frac{3\sqrt{13}-5}{16},$$

则 $\cos^2\theta=\frac{\cos2\theta+1}{2}=\frac{3\sqrt{13}+11}{32}=(\frac{\sqrt{13}+3}{8})^2$. 由 $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$ 知 $\cos\theta>0$, 所以 $\cos\theta=\frac{\sqrt{13}+3}{8}$, 故 D 正确.

解法 3 如图 15, 以 DE 的中点为原点建立平面直角坐标系 Oxy, 易得 $E(-\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, $D(\frac{\sqrt{3}}{2},0)$, ΔACD 和 ΔBCE 的外接圆方程分别为 $(x+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(y-1)^2=4$ 和 $(x-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(y-1)^2=4$, 联立两外接圆方程, 解得 $(x,y)=(0,\frac{2+\sqrt{13}}{2})$, 或 $(x,y)=(0,\frac{2-\sqrt{13}}{2})$ (舍去), 于是 $C(0,\frac{2+\sqrt{13}}{2})$, 则

$$\overrightarrow{CE}=(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{2+\sqrt{13}}{2}),\overrightarrow{CD}=(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{2+\sqrt{13}}{2}),$$

从而

$$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{7+2\sqrt{13}}{2},\left|\overrightarrow{CE}\right|=\left|\overrightarrow{CD}\right|=\sqrt{5+\sqrt{13}},$$

所以

$$\cos\theta=\cos<\overrightarrow{CE},\overrightarrow{CD}>=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\frac{3+\sqrt{13}}{8}.$$

故 D 正确.

3 试题的评价分析

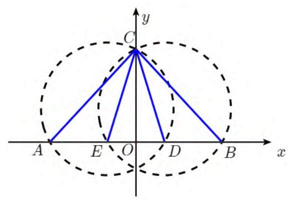

图 15

解三角形多选题的命制, 立足于高考试题, 以“隐圆”为背景, 以数学学科核心素养为导向, 考查了正弦定理、余弦定理、基本不等式、平面向量、圆等基础知识, 难度中档偏难, 对学生的综合能力要求较高. 本题在解题方法上具有多样性, 鼓励思维创新, 引导学生在解三角形时, 要关注的首先是几何的关系, 然后才是函数与代数的关系[2], 要求学生能以整体的视角审视问题, 抓住问题本质, 迁移思想方法, 创造性地解决问题. 本题考查了转化与化归、数形结合、函数与方程等数学思想方法, 有助于提升学生的直观想象、逻辑推理、数学运算和数学建模素养 (见表 1) .

4 命题反思

4.1 立足基础, 素养导向

试题的命制需要立足基础, 依据《普通高中数学课程标准 (2017 年版) 》所规定的内容和要求, 以核心素养为导向, 创建合理的问题情境, 设计的问题不仅要考虑知识点的覆盖面、题目的难度, 也要考虑切合教学实际、符合学生的学习和生活实际. 同时, 问题的解决应具备入口宽、起点低、坡度缓、尾巴翘的特点, 允许多角度解决问题, 鼓励思维创新[3], 考查学生的基础知识、基本技能、基本思想方法和基本活动经验, 培养学生良好的数学思维品质, 提升学生的数学核心素养.

4.2 深度研究, 创新命题

试题的命制还需要在反套路、反机械刷题上下功夫, 所以命题时还需要深入研究相关的知识, 尽量选用新背景、新材料, 或者融合知识点, 创设新的问题情境, 巧妙设问. 对于一些经典题型, 可以对其进行改造、升华或者使用新的设问方式等, 变成一道新颖的题型. 命题要注重引导学生去理解数学知识的本质, 提高学生的知识迁移能力、逻辑推理能力和创新能力.

表 1 数学学科核心素养的表现及其级别

选项	考查知识点	核心素养	核心素养表现	素养级别
A	余弦定理、圆	逻辑推理	通过对图形分析发现 $\angle ADC,\angle BDC$ 两角互补, 得到数量关系, 建立方程.	水平一
		数学运算	解方程, 计算得到 $\cos\angle ACB<0$, 得出结论.	水平一
		直观想象	发现长度之间存在的关系, 想象并构建出圆.	水平二
B	正弦定理、余弦定理、基本不等式、面积公式、两角和正弦公式、二倍角公式、辅助角公式、圆	逻辑推理	通过分析发现 ΔABC 与 ΔACD 面积之间存在关联, 将问题转化为求 ΔACD 面积, 并选择合适的求解方法.	水平二
		数学运算	根据式子的结构特征, 选择合适的运算方法.	水平二
		直观想象	发现图形中存在定角, 想象并构建出圆.	水平二
C	正弦定理、余弦定理、两角和正弦公式、二倍角公式、诱导公式、辅助角公式、圆	逻辑推理	将边长转化为角, 利用三角函数知识求解.	水平二
		数学运算	根据式子结构, 选择相应的公式化简、求值.	水平二
		直观想象	发现图形中存在定角, 想象并构建出圆.	水平二
D	正弦定理、面积公式、两角和正余弦公式、二倍角、诱导公式、圆、平面向量数量积	逻辑推理	推理发现可以利用共同的边长, 或三角形面积之间的数量关系构建方程求解.	水平二
		数学运算	求解方程, 选择合适的公式化简、求值.	水平二
		直观想象	发现图形中存在定角, 想象并构建出两个圆.	水平二
		数学建模	能够根据图形特征建立合适的平面直角坐标系, 求出两个圆的方程, 将几何问题代数化.	水平二

4.3 反思自身, 提升能力

研究命题是教师的一项重要工作, 不仅能加深教师自己对所教知识的理解, 同时也可以为课堂教学提供服务. 要命制好一道题, 并不容易, 教师必须要认真研读《普通高中数学课程标准 (2017 版) 》的要求, 研究教材、研究教法、了解学情, 明确知识和能力的考核点. 同时, 教师在教学或者解题的过程中, 要收集积累对自己有用的素材, 不断充实完善自己的理论知识库, 提升研究能力, 才能更好地命制出科学的、有创造性的、有针对性的试题, 进而以题来引领教学, 切实提高课堂教学质量.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准 (2017 年版) [S]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[2] 教育部教育考试院. 高考试题分析 (数学 2024 年版) [M]. 北京: 语文出版社, 2023.

[3] 黄启贤, 唐德福. 高考评价体系下交汇命题的实践与思考——以一道三角函数与导数交汇试题的命制为例 [J]. 数学通讯, 2022, (16) : 48-51.