数少形时少直觉

——以一道解三角形典型问题的探究为例

周仕敏(江苏省南京市人民中学 210008)

【摘 要】 直观想象是数学新课程标准提出的六大核心素养之一,近几年的全国高考也对直观想象进行了重点考查.三角形是最基本的平面图形,借助其几何图形来解决问题也是基本手段.

【关键词】 几何直观;解三角形;解题技巧

几何直观是数学新课程标准提出的核心概念之一,是指利用图形描述和分析问题,借助它把复杂的数学问题变得简明、形象,有助于探索解决问题的思路,预测结果.利用正余弦定理解任意三角形是高中数学基本且重要的知识,常见的模型和解题办法在平时的教学中都是反复强调,没想到在一轮复习时还会遇到这样一个问题.

例1 (2017年北京卷)在$\triangle ABC$中,已知$A=\frac{\pi}{3}$,$c=\frac{3}{7}a$.

(1)求$\sin C$的值;

(2)若$a=7$,求$\triangle ABC$的面积.

关注第(2)问.

学生1 由大前提和第(1)问所得,该三角形已知$\angle A$和$\angle C$,这时候通常求出第三个角B.又因为$a=7$,$c=3$,所以选择面积公式$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B$,问题得解.

具体为:由$c<a$,得到$C<A$,

所以$C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\cos C=\frac{13}{14}$.

$\sin B=\sin\left(\frac{\pi}{3}+C\right)=\frac{8\sqrt{3}}{14}$,

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=6\sqrt{3}$.

两步转化顺利完成,没有遇到困难.

学生2 分析,该三角形已知$A=\frac{\pi}{3}$,$a=7$,$c=3$,要求三角形面积,想选择面积公式$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A$,只要求出$b$即可.问题转化为三边和一个角的关系,通过余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$,得$b^2-3b-40=0$,解得$b=8$或$-5$(舍去).同样得到$\triangle ABC$的面积为$6\sqrt{3}$.

学生3 我的方法与学生2类似,先求出b,再求面积.但是我选择的余弦定理公式为$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,得$b^2-13b+40=0$,解得$b=8$或5.这样就会得到双解,为什么会这样?如何舍去$b=5$?

教师没有简单地否定学生选择的不合适,更没有粗暴要求学生3按照学生2的思路去处理就没有这个问题了,而是在下节课时展示学生3的过程,带领大家一起来讨论.

学生4 在$\triangle ABC$中,可由$\sin B=\frac{8\sqrt{3}}{14}>\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin A$,得$B>A$,所以$b>a=7$,舍去$b=5$.

学生5 因为$A=\frac{\pi}{3}$,A是锐角,所以$a^2<b^2+c^2$,所以$b^2>a^2-c^2=40$,舍去$b=5$.

学生6 验一下:当$b=5$时,由$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\frac{1}{2}$,得$A=\frac{2\pi}{3}$,舍去;

当$b=8$时,由$\cos A=\frac{1}{2}$,得$A=\frac{\pi}{3}$,符合题意.

教师 感谢学生3给我们提出了一个这么有价值的问题,同学们处理得很好!都成功地排除了不合题意的解,但如果能选择的话,我们希望能避开多解的情况.接下来,我们来探讨能否避开.解法1和解法2面对的解三角形问题,都是已知三角形的两边及其中一边的对角,求第三边.这样的三角形的解的情况可以通过作图来研究.具体如下.

解法1 在$\triangle ABC$中,已知$A=\frac{\pi}{3}$,$a=7$,$c=3$,作图1,圆弧与直线AC有两个交点,分别位于A点两侧,对应$b=8$和-5,舍去-5.

解法2 在$\triangle ABC$中,已知$\sin C=\frac{3\sqrt{3}}{14}$,$a=7$,$c=3$,作图2,圆弧与直线$CA$有两个交点,均位于$C$

点右侧，对应 $b=5$ 和 8 这两解. 从图 2 中我们可以看到，当 $b=5$ 时，$\angle CA'B$ 为钝角，与题意不符；当 $b=8$ 时，$\angle CAB$ 为锐角，符合题意.

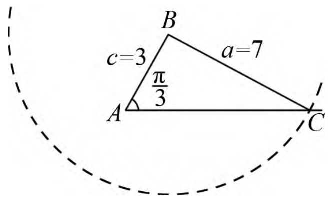

图 1

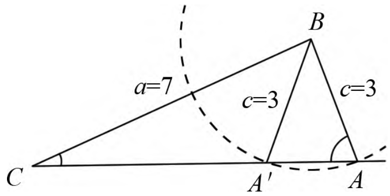

图 2

从以上两图中，我们发现，在这种问题中，我们用余弦定理来求第三边时，应选择比较大的角，可以有效避开多解的问题.

学生们恍然大悟.

反思　“用图形来判断这类三角形的解的个数”在知识梳理有，但是学生感觉解题中很少用到，探究它的兴趣缺乏，这个知识点形同虚设. 而在本题的探究中，学生发现图形的直观感受印象深刻，还通过观察总结了做题经验，激活了这个知识点.

教师紧跟着给了一个练习：

(2018年北京卷) 在 $\triangle ABC$ 中，$a=7$，$b=8$，$\cos B=-\dfrac{1}{7}$.

(1) 求 A；

(2) 求 AC 边上的高.

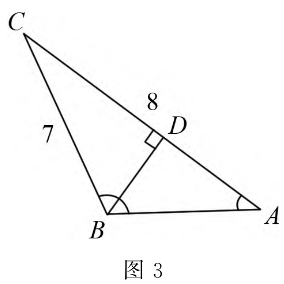

图 3

学生反馈　第(1)问可得 $A=\dfrac{\pi}{3}$，如图 3 所示，要求 BD，可在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中解决，先求出 AB 边；而求 AB 边可在 $\triangle ABC$ 中利用余弦定理；此时已知 A 和 B，选较大角不会产生多解，所以应该由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $c^2+2c-15=0$，解得 $c=3$ 或 -5(舍去)，即 $AB=3$，从而 $BD=3\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

教师　学以致用，很好！

美国教育家苏娜丹戴克说：“告诉我，我会忘记，做给我看，我会记住，让我参加，我就会完全理解.”教师在教学中对学生进行启迪、诱导，尽量让学生在实践中去获得知识，从而留下美好而深刻的印象.

在后来的一节课上又遇到这样一个问题：

(2019年全国卷III理科第18题) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，已知 $a\sin\dfrac{A+C}{2}=b\sin A$.

(1) 求 B；

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，且 $c=1$，求 $\triangle ABC$ 面积的取值范围.

第(1)问求得 $B=\dfrac{\pi}{3}$，解答过程略. 第(2)问由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a$，后面不知道该如何走了.

教师　接下来如果能求出 a 的范围，问题就解决了. 限定条件有哪些？怎么用？小组讨论一下. (对于走边和走角的传统解法此处不赘述) 一个学生提出来：“老师，画张图就解决了！”由锐角三角形的限定条件，如图 4 所示，C 点有两个极限位置 C_1，C_2，分别使得 C 和 A 为直角，解得 $BC_1=\dfrac{1}{2}$，$BC_2=2$，可得 $\dfrac{1}{2}<a<2$.

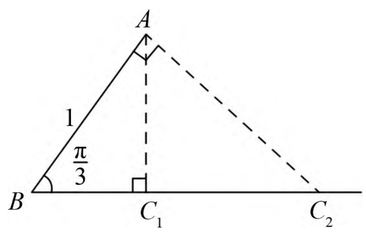

图 4

教师肯定了学生 2 的想法，并协助他完成了上述思路的表述.

结语

在教学中，可以引导学生养成画图的好习惯，借助基本图形、信息技术等方法培养学生的几何直观性. 教师把几何直观运用得越充分，学生的直观表达就越清晰，领悟能力就越强，分析问题和解决问题的能力也越强.