调和线束中的平行平分模型

——2022年3道解析几何高考真题的统一背景研究

◉ 湖北省武昌实验中学　柯希湖

1 问题引路——高考真题呈现

考题1　(2022年北京卷第21题)已知椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为$A(0,1)$,焦距为$2\sqrt{3}$.

(1)求椭圆E的方程;

(2)过点$P(-2,1)$作斜率为k的直线与椭圆E交于不同的两点B,C,直线AB,AC分别与x轴交于点M,N,当$|MN|=2$时,求k的值.

考题2　(2022年新高考Ⅰ卷第21题)已知点$A(2,1)$在双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2-1}=1(a>1)$上,直线$l$交$C$于$P,Q$两点,直线$AP,AQ$的斜率之和为0.

(1)求l的斜率;

(2)若$\tan\angle PAQ=2\sqrt{2}$,求$\triangle PAQ$的面积.

考题3　(2022年新高考Ⅱ卷第21题)已知双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为$F(2,0)$,渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.

(1)求E的方程.

(2)过F的直线与C的两条渐近线分别交于A,B两点,点$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$在C上,且$x_1>x_2>0,y_1>0$.过P且斜率为$-\sqrt{3}$的直线与过Q且斜率为$\sqrt{3}$的直线交于点M.从下面①②③中选取两个作为条件,证明另外一个成立:

①M在AB上;②$PQ\parallel AB$;③$|MA|=|MB|$.

注:若选择不同的组合分别解答,则按第一个解答计分.

2 背景介绍——平行平分模型

2.1 调和点列

欧式几何中的调和点列:同一直线上依次排列的四个点A,B,C,D,若满足$\frac{|AB|}{|CB|}=\frac{|AD|}{|CD|}$,则称$A,B,C,D$构成调和点列.

射影几何中的调和点列:欧式几何中的调和点列也是射影几何中的调和点列.在此基础上,将无穷远点看做一个点,同一直线上依次排列的四个点A,B,C,∞,若满足$\frac{|AB|}{|CB|}=\frac{|A\infty|}{|C\infty|}=1$,即$|AB|=|CB|$,则称$A,B,C,\infty$构成调和点列.

2.2 调和线束

已知P是调和点列A,B,C,D所在直线外的任意一点,则线束PA,PB,PC,PD构成调和线束.

注:点P一般选为投射中心,称为射心.

2.3 平行平分模型

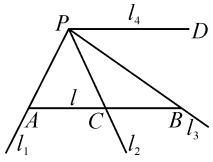

图1

如图1,已知线束l_1,l_2,l_3,l_4交于点P,直线l分别交l_1,l_2,l_3于点A,C,B.

①若l_1,l_2,l_3,l_4为调和线束,$l\parallel l_4$,则$|AC|=|CB|$;

②若$l\parallel l_4$,$|AC|=|CB|$,则l_1,l_2,l_3,l_4为调和线束;

③若l_1,l_2,l_3,l_4为调和线束,$|AC|=|CB|$,则$l\parallel l_4$.

2.4 极点极线与调和点列

2.4.1 由调和点列得到极点极线

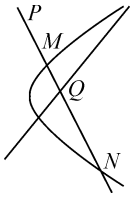

图2

如图2,定点$P(x_0,y_0)$不在圆锥曲线$\Gamma:Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$上,过点$P$的动直线$l$交$\Gamma$于$M,N$两点,$l$上不同于$P$的另一点$Q$满足$\frac{|PM|}{|PN|}=\frac{|QM|}{|QN|}$,则点$Q$的轨迹在直线$Ax_0x+B\frac{x_0x+y_0y}{2}+Cy_0y+D\frac{x_0+x}{2}+E\frac{y_0+y}{2}+F=0$上.

2.4.2 由极点极线得到调和点列

如图2,定点$P(x_0,y_0)$不在圆锥曲线$\Gamma:Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$上,点$P$关于$\Gamma$的极线为$Ax_0x+B\frac{x_0x+y_0y}{2}+Cy_0y+D\frac{x_0+x}{2}+E\cdot$

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$\frac{y_0+y}{2}+F=0$，过点 P 的动直线 l 交该 Γ 于 M,N 两点，交极线于与 Q，则 $\frac{|PM|}{|PN|}=\frac{|QM|}{|QN|}$，即 P,Q,M,N 为调和点列.

注：上述两个命题描述了圆锥曲线中极点极线与调和点列的基本关系，结合调和点列与调和线束的基本关系，三者可以相互转化.两个命题的证明略.

3 命题背景——换位剖析真题

3.1 换位剖析 2022 年北京卷第 21 题

如图 3，椭圆的左顶点 $D(-2,0)$，直线 $AD:y=\frac{1}{2}x+1$，恰好是点 P 关于椭圆的极线.

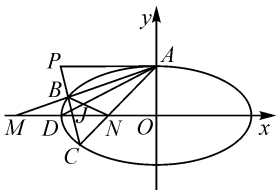

图 3

设直线 PC 交直线 AD 点 J，故 P,J,B,C 形成调和点列，进而 AP,AJ,AB,AC 形成调和线束，且 $AP/\!/MN$.

由平行平分模型①，可知 $|DM|=|DN|$，结合 $D(-2,0)$，故 $N(-1,0)$.

将直线 $AN:y=x+1$ 与椭圆方程 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 联立，解得 $C\left(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right)$，则 $k=k_{PC}=-4$.

注：(1)发现直线 AD 是点 P 关于椭圆的极线很关键，为后面寻找调和点列和调和线束打下基础.

(2)找到调和点列 P,J,B,C，再结合题设条件选取合适的射心 A，得到调和线束 AP,AJ,AB,AC，转化为平行平分模型解决问题.

3.2 换位剖析 2022 年新高考 I 卷第 21 题

如图 4，设直线 AP,AQ 分别交 x 轴于点 B,D，过点 A 作 x 轴垂线交 x 轴于点 N，交直线 PQ 于点 S，过点 A 作 y 轴垂线交直线 PQ 于点 T，过点 S 作 y 轴的垂线与过点 T 垂直于 x 轴的直线交于点 K.设 $T(x_0,1),S(2,y_0)$，则 $K(x_0,y_0)$.

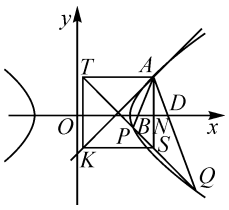

图 4

由辅助线的作法可知，四边形 $ATKS$ 是矩形，所以直线 AK 斜率 k_{AK} 和直线 TS 的斜率 k_{TS} 互为相反数，故 $k_{AK}=-k_{TS}$，即 $k_{PQ}=-k_{AK}$.

由直线 AP,AQ 的斜率之和为 0，得 $|BN|=|ND|$.

结合 $AT/\!/BD$，由平行平分模型结论②，得线束 AT,AS,AP,AQ 为调和线束，进而 T,S,P,Q 为调和点列.

结合点 P,Q 在双曲线上，得 T,S 关于双曲线调和共轭，即点 T 在点 S 的极线上，点 S 在点 T 的极线上.

点 $T(x_0,1)$ 关于双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 的极线方程为 $\frac{x_0x}{2}-y=1$，代入点 $S(2,y_0)$，得 $y_0=x_0-1$，这意味着点 $K(x_0,y_0)$ 的轨迹为直线 $y=x-1$.

经检验知，点 $A(2,1)$ 也在直线 $y=x-1$ 上，从而直线 AK 的方程为 $y=x-1$，于是 $k_{PQ}=-k_{AK}=-1$.

3.3 换位剖析 2022 年新高考 II 卷第 21 题

因为该试题是一道结构不良类型的证明题，所以在此着重分析试题背景中的平行平分模型及应用过程，部分步骤中涉及的代数运算证明仅做简单叙述(主要涉及斜率条件的转化).

如图 5，设直线 AB 与双曲线交于 C,D 两点，由直线与双曲线及渐近线相交的性质得 $|AC|=|BD|$，这意味着 AB 的中点即 CD 的中点，这个中点即试题中准备研究的点 M.

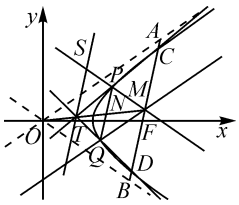

图 5

设直线 CP,DQ 交于点 T，取 PQ 中点 N，直线 TN 交直线 AB 于点 L，过点 T 作 PQ 的平行线 TS，由 $|PN|=|NQ|$，结合平行平分模型结论②，线束 TS,TN,TP,TQ 为调和线束，即线束 TS,TL,TC,TD 为调和线束.

(1)选择①②证明③

若 $PQ/\!/AB$，则 $TS/\!/AB$.由平行平分模型结论①，得 $|CL|=|DL|$，即 L 是 CD 中点，从而 $|AL|=|BL|$.结合直线 MP,MQ 的斜率分别为 $-\sqrt{3},\sqrt{3}$，计算可得此时点 L 为点 M，从而 $|MA|=|MB|$.

(2)选择②③证明①

若 $PQ/\!/AB$，结合 $TS/\!/PQ$，则有 $TS/\!/AB$.

因为线束 TS,TL,TC,TD 为调和线束，结合平行平分模型结论①，可知 $|LA|=|LB|$.

由 $x_1>x_2>0$ 得弦 PQ 不垂直于 x 轴，所以弦 AB 也不垂直于 x 轴，故弦 AB 的中垂线不过原点 O，

由直线 MP,MQ 的斜率分别为 $-\sqrt{3},\sqrt{3}$，计算可得 O,N,M 三点共线，故点 M,L 都在直线 ON 上.结合 $|MA|=|MB|,|LA|=|LB|$，直线 ON 不是 AB 的中垂线，从而点 M,L 重合.故点 M 在 AB 上.

(3)选择①③证明②，略.

基于高等几何的极点极线的相关内容，对尖子生而言，一般用于速算结果、探究方向，虽然解题很快，但要慎重考虑是否可作为高中卷面的书写过程.Z

(C)1994-2024 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net