

# 一道 2023 年解析几何模考题的探究

宋桃富(广东省佛山市顺德区乐从中学 528315)

**【摘要】** 从历年高考真题和各地模拟卷可以看到,依托极点极线的背景来命制的圆锥曲线综合问题非常多,考查的不是高中数学知识生搬硬套,而是高中生的逻辑推理能力和运算求解能力.教学中,我们可以站在更高处来看待问题,了解知识的背景和原理有助于更好理解问题.

**【关键词】** 高中数学;椭圆;圆锥曲线

## 1 试题呈现

**试题** (2023 年燕博园 21 题) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的短轴长为 2,离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . 点  $P(4, 2)$ , 直线  $l: x + 2y - 1 = 0$ .

(1) 证明: 直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于两点, 且每一点与  $P$  的连线都是椭圆的切线;

(2) 若过点  $P$  的直线与椭圆交于  $A, B$  两点, 与直线  $l$  交于点  $Q$ , 求证:  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ}$ .

本试题以椭圆为载体, 考查圆锥曲线切线、定值问题. 问题(1) 是以极点、极线为背景, 证明椭圆的切线; 问题(2) 以调和点列性质为背景, 证明直线与椭圆交点的线段乘积等量关系. 本题的知识背景深厚, 解题方法多样, 较好地考查了考生的逻辑推理能力和数学运算能力.

## 2 证法探究

$$\text{由题知} \begin{cases} 2b = 2, \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \text{ 因此 } a^2 = 4, b^2 = 1,$$

则椭圆方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ x + 2y - 1 = 0, \end{cases} \text{ 消去 } x,$$

可得  $8y^2 - 4y - 3 = 0, \Delta = (-4)^2 - 4 \times 8 \times (-3) = 112 > 0$ , 则该方程有两个不相等的实根, 所

以直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于两点.

下面从不同视角, 对问题(1) 的证明切线及问题(2) 进行解答.

### 2.1 问题(1) 证明

**证法 1** 设  $M(1 - 2y_0, y_0)$  为直线  $l$  与椭圆  $C$  的交点,

$$\text{则 } 8y_0^2 - 4y_0 - 3 = 0, y_0^2 = \frac{1}{2}y_0 + \frac{3}{8},$$

$$\text{直线 } PM \text{ 的方程为 } y = \frac{y_0 - 2}{-2y_0 - 3}(x - 4) + 2,$$

$$\text{即 } y = \frac{2 - y_0}{2y_0 + 3}x + \frac{8y_0 - 2}{2y_0 + 3}.$$

代入椭圆方程得

$$x^2 + 4\left(\frac{2 - y_0}{2y_0 + 3}x + \frac{8y_0 - 2}{2y_0 + 3}\right)^2 = 4,$$

$$\text{所以 } \left[1 + \frac{4(2 - y_0)^2}{(2y_0 + 3)^2}\right]x^2$$

$$+ \frac{8(2 - y_0)(8y_0 - 2)}{(2y_0 + 3)^2}x$$

$$+ \frac{4(8y_0 - 2)^2}{(2y_0 + 3)^2} - 4 = 0,$$

$$\text{整理得 } (8y_0^2 - 4y_0 + 25)x^2 + 16(-4y_0^2 + 9y_0 - 2)x + 4(60y_0^2 - 44y_0 - 5) = 0,$$

$$\text{即 } 2x^2 + 4(2y_0 - 1)x - (4y_0 - 5) = 0,$$

$$\text{从而 } \Delta = 16(2y_0 - 1)^2 + 8(4y_0 - 5) = 8(8y_0^2 - 4y_0 - 3) = 0.$$

所以直线  $PM$  与椭圆  $C$  只有一个交点, 即  $PM$  是椭圆的切线.

$$\text{证法 2} \text{ 由 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \text{ 令 } X = \frac{x}{2}, Y = y,$$

$$\text{得 } C': X^2 + Y^2 = 1, l': 2X + 2Y - 1 = 0, P'(2, 2),$$

则过  $P'$  求圆  $C'$  的切线, 可得切点弦方程为  $2X + 2Y - 1 = 0$ , 从而可知  $C'$  与  $l'$  的两交点, 任意一点与  $P'$  连线都是圆  $C'$  的切线, 又因为伸缩变换不改

变图形的相切和相交特征,从而得证直线 $l$ 与椭圆 $C$ 的两相交点,与 $P$ 的连线都是椭圆的切线.

**证法3** 过点 $P(x_0, y_0)$ 作椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的切线,

则切点弦所在直线方程为 $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ .

所以过 $P(4, 2)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的切线,

切点弦所在直线方程为 $\frac{4x}{4} + 2y = 1$ ,

即 $x + 2y - 1 = 0$ ,即直线 $l$ 为切点弦.

所以直线 $l$ 与椭圆 $C$ 的交点与 $P$ 的连线是椭圆的切线.

**证法4** 由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$

解得 $P_1\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}, \frac{1-\sqrt{7}}{4}\right)$ ,

$P_2\left(\frac{1-\sqrt{7}}{2}, \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$ ,

所以 $k_{PP_1} = \frac{4+\sqrt{7}}{6}, k_{PP_2} = \frac{4-\sqrt{7}}{6}$ ,

设过 $P(4, 2)$ 直线方程为 $y = kx - k + 2$ ,

由 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = kx - k + 2, \end{cases}$

所以 $\left(k^2 + \frac{1}{4}\right)x^2 + (4k - 8k^2)x + 16k^2 - 16k$

$+ 3 = 0$ ,

由 $\Delta = 0$ 得 $k = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{6}$ ,即过 $P(4, 2)$ 作椭圆 $C$

的切线,两切线分别为 $PP_1, PP_2$ .所以直线 $l$ 与椭圆 $C$ 的交点与 $P$ 的连线是椭圆的切线.

## 2.2 问题(2) 证明

因为 $P, A, B, Q$ 四点共线,由(1)可知 $P$ 在线段 $AB$ 外, $Q$ 在线段 $AB$ 上,所以 $\overrightarrow{PA}$ 与 $\overrightarrow{PB}$ 的方向相同, $\overrightarrow{QB}$ 与 $\overrightarrow{AQ}$ 的方向相同,设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), Q(x_3, y_3)$ .

**证法1** 要证 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ}$ ,

只需要 $|PA| \cdot |QB| = |PB| \cdot |AQ|$ ,

即证 $\frac{|PA|}{|AQ|} = \frac{|PB|}{|QB|}$ ,

不妨设 $x_1 < x_3 < x_2$ ,

因为 $P, A, B, Q$ 四点共线,

所以 $\frac{|PA|}{|AQ|} = \frac{|PB|}{|QB|}$ ,

等价于 $\frac{4-x_1}{x_3-x_1} = \frac{4-x_2}{x_2-x_3}$ ,

即 $(4-x_1)(x_2-x_3) - (4-x_2)(x_3-x_1) = 0$ ,

化简得,等价于求证 $-8x_3 + (x_3+4)(x_1+x_2) - 2x_1x_2 = 0$ .

设直线 $PQ$ 的方程为 $y - 2 = k(x - 4)$ ,

即 $y = kx + 2 - 4k$ ,

由 $\begin{cases} y = kx + 2 - 4k, \\ x + 2y - 1 = 0, \end{cases}$

可得 $x_3 = \frac{8k-3}{1+2k}$ .

又由 $\begin{cases} y = kx + 2 - 4k, \\ x^2 + 4y^2 = 4, \end{cases}$

可得 $(1+4k^2)x^2 + 16(1-2k)kx + 4(2-4k)^2 - 4 = 0$ ,

所以 $x_1 + x_2 = \frac{16(2k-1)k}{1+4k^2}$ ,

$x_1x_2 = \frac{4(2-4k)^2 - 4}{1+4k^2}$ ,

从而 $-8x_3 + (x_3+4)(x_1+x_2) - 2x_1x_2$

$= \frac{-8(8k-3)}{1+2k} + \left(\frac{8k-3}{1+2k} + 4\right) \frac{16(2k-1)k}{1+4k^2}$

$- \frac{8(2-4k)^2 - 8}{1+4k^2}$

$= \frac{24-64k}{1+2k} + \frac{16k+1}{1+2k} \times \frac{16(2k^2-k)}{1+4k^2}$

$+ \frac{8(-16k^2+16k-3)}{1+4k^2}$

$= \frac{8[(3-8k)(1+4k^2) + (16k+1)(4k^2-2k) + (-16k^2+16k-3)(1+2k)]}{(1+2k)(1+4k^2)} = 0$ .

所以结论成立.

## 3 试题推广

试题适当推广及结论的普遍性探讨,可以强化问题的理解,引导学生对问题规律进行思考,升华解题思想方法,提高解题的迁移能力,发展学生的创新

能力,提升数学学科素养.对于本考题,可以如下试题推广.

**结论 1** 过椭圆  $C$  外点  $P(x_0, y_0)$ , 作椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的两条切线, 切点为  $M, N$ ; 若过点  $P$  的直线  $m$  与椭圆交于  $A, B$  两点, 与切点弦  $MN$  交于点  $Q$ , 则

$$(1) \text{ 切点弦 } MN \text{ 所在直线方程为 } \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1;$$

$$(2) \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ}.$$

**结论 2** 过双曲线  $C$  外点  $P(x_0, y_0)$ , 作双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的两条切线, 切点为  $M, N$ ; 若过点  $P$  的直线  $m$  与双曲线交于  $A, B$  两点, 与切点弦  $MN$  交于点  $Q$ . 则:

$$(1) \text{ 切点弦 } MN \text{ 所在直线方程为 } \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1;$$

$$(2) \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ}.$$

**结论 3** 过抛物线  $C$  外点  $P(x_0, y_0)$ , 作抛物线  $C: y^2 = 2px$  的两条切线, 切点为  $M, N$ ; 若过点  $P$  的直线  $m$  与抛物线交于  $A, B$  两点, 与切点弦  $MN$  交于点  $Q$ . 则:

$$(1) \text{ 则切点弦 } MN \text{ 所在直线方程为 } y_0 y = 2p \frac{x_0 + x}{2}, \text{ 即 } y_0 y = p(x_0 + x);$$

$$(2) \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ}.$$

**评注** 以上结论的证明可参照试题的证明过程, 限于篇幅, 不再给出.

#### 4 试题的逆向思考

考虑试题的逆命题: 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . 点  $P(4, 2)$ , 直线  $l: x + 2y - 1 = 0$ .

(1) 直线  $l$  与椭圆  $C$  相交于两点  $M, N$ , 过  $M, N$  两点分别作椭圆切线  $l_1, l_2$ , 则  $l_1$  与  $l_2$  相交于点  $P$ ;

(2) 若过点  $P$  的直线  $m$  与椭圆交于  $A, B$  两点, 且直线  $m$  上一点  $Q$  满足  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ}$ , 则点  $Q$  在直线  $l$  上.

**评注** 试题的逆命题是正确的, 联系结论 1 至结论 3, 容易得到三个结论的逆命题, 详细的证明留

给感兴趣的读者进行研究.

#### 5 试题背景探究

**引理 1 (极点极线几何特征<sup>[1]</sup>)** 以椭圆为例, 如图 1 所示, 设  $P$  为椭圆外一点, 过  $P$  作椭圆的两条割线分别与椭圆相交于  $A, B$  和  $C, D$  四点,  $AC$  与  $BD$  交于点  $M$ ,  $AD$  与  $BC$  交于点  $N$ , 则称点  $P$  为直线  $MN$  关于椭圆的极点, 直线  $MN$  为点  $P$  关于椭圆的极线; 另一方面, 图 1 也可以这么来看, 从椭圆外的点  $N$  作椭圆的两条割线分别交椭圆于  $A, D$  和  $B, C$  四点,  $AC$  与  $BD$  交于点  $M$ ,  $AB$  与  $CD$  交于点  $P$ , 所以点  $N$  和直线  $PM$  也是一对极点和极线, 同理, 点  $M$  和直线  $PN$  也是一对极点和极线, 因此在  $\triangle PMN$  中, 以其中一个顶点作为极点, 该顶点的对边所在的直线就是对应的极线, 从而我们将  $\triangle PMN$  称为“自极三角形”, 为了加以区分, 图中画成了虚线. 如图 2 所示, 当其中一条割线变成切线时, 此时  $D, M, N$  几个点就都与切点  $C$  重合, 从而点  $C$  和切线  $PC$  是一对极点极线.

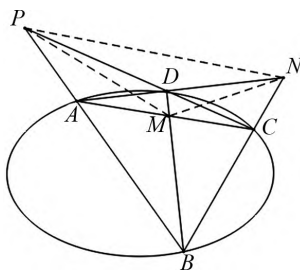


图 1

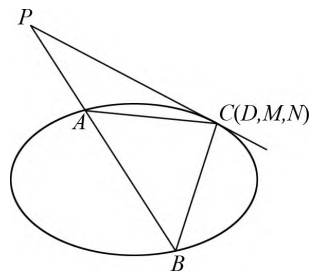


图 2

**引理 2 (极点极线的代数特征<sup>[2]</sup>)** 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 设有圆锥曲线  $C$  (圆、椭圆、双曲线、抛物线均可) 和不与  $C$  的对称中心重合的点  $P(x_0, y_0)$ , 在圆锥曲线  $C$  的方程中, 用  $x_0 x$  替换  $x^2$ ,  $y_0 y$  替换  $y^2$ ,  $\frac{x_0 + x}{2}$  替换  $x$ ,  $\frac{y_0 + y}{2}$  替换  $y$ , 得到的方程即为以  $P$  作为极点的极线  $l$  的方程. 即过二次曲线  $C$  外一点  $P(x_0, y_0)$ , 作曲线  $C: Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$  的两条切线, 切点为  $M, N$ , 则切点弦  $MN$  所在直线方程为  $Axx_0 + Byy_0 + D \cdot \frac{x + x_0}{2} + E \cdot \frac{y + y_0}{2} + F = 0$ .

以椭圆为例:

(1) 当点  $P$  在椭圆  $C$  上时, 极线  $l$  为椭圆  $C$  在  $P$

处的切线,如图3所示;

(2) 当点  $P$  在椭圆  $C$  外部时,极线  $l$  为过点  $P$  对椭圆  $C$  的切点弦所在直线,如图4所示.

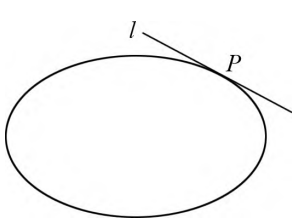


图3

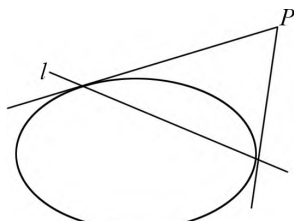


图4

**引理3 (极点极线的调和分割性)**(以椭圆为例)如图5所示,设极点  $P$  的极线是直线  $l$ ,过  $P$  作椭圆的一条割线交椭圆于  $A, B$  两点,交极线  $l$  于点  $Q$ ,则  $P, A, Q, B$  成调和点列,即  $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|QA|}{|QB|}$  (或写成  $\frac{2}{|PQ|} = \frac{1}{|PA|} + \frac{1}{|PB|}$ ).

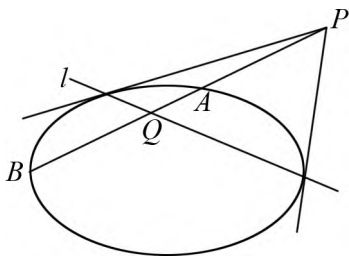


图5

**试题回顾** 从极点极线看,试题的问题(1),如上图4,  $P$  为极点,由引理2极点极线的代数特征,可快速求解极线方程即为直线  $l$  方程,即直线  $l$  为极线,从而得证“直线  $l$  与椭圆  $C$  的两交点,任一点与  $P$  的连线都是椭圆的切线”. 试题的问题(2),如上图5,  $P$  为极点,由引理3可知,则  $P, A, Q, B$  成调和点列,即  $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{|QA|}{|QB|}$ ,即  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AQ}$ . 站在极点极线的背景知识下,试题的两个问题均可快速得到解决. 同时,我们也可以更好地理解命题者如何命制此试题.

## 6 链接真题

**真题1** (2020年新课标I卷题20) 已知  $A, B$  分别为椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$  的左、右顶点,  $G$  为  $E$  的上顶点,  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8, P$  为直线  $x = 6$  上的动

点,  $PA$  与  $E$  的另一交点为  $C, PB$  与  $E$  的另一交点为  $D$ .

(1) 求  $E$  的方程;

(2) 证明: 直线  $CD$  过定点.

**分析** 问题(2)从极点极线看,如图6所示,设  $AB$  和  $CD$  交于点  $Q, AD$  和  $CB$  交于点  $M$ , 则  $\triangle PQM$  为自极三角形,所以点  $Q$  和直线  $PM$  是一对极点极线,设  $Q(m, 0)$ , 则极线  $PM$  的方程为  $\frac{mx}{9} = 1$ , 即  $x = \frac{9}{m}$ , 又点  $P$  在直线  $x = 6$  上, 所以  $\frac{9}{m} = 6$ , 从而  $m = \frac{3}{2}$ , 故  $Q(\frac{3}{2}, 0)$ , 这样就得到了直线  $CD$  过定点  $(\frac{3}{2}, 0)$ .

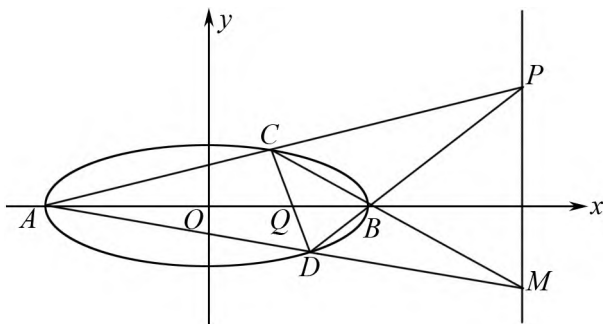


图6

## 7 结语

从往年高考真题和各地模拟卷可以看到,这种依托极点极线的背景来命制的圆锥曲线综合问题非常多,都是从同一知识背景不断挖掘,且又进行不同变式设置,考查的不是高等数学知识生搬硬套,而是高中生的逻辑推理能力和运算求解能力,这既体现了传承经典,又适度创新! 在平时的教学上,我们可以站在更高处来看待问题,了解知识的背景和原理有助于更好理解问题;另外在平时教学中,对问题多进行变式及结论推广,能有效地培养学生的思维能力和创新能力.

## 参考文献:

- [1] 信统帅, 姜坤崇. 有心圆锥曲线中的一组调和点列[J]. 中学教学研究, 2023(06): 36-37.
- [2] 林国红. 极点与极线在圆锥曲线中的应用[J]. 数理化学习, 2019(11): 41-42.