中学生数学·2023年11月 上半月·总 第717期·高中

极点极线作背景，定比点差显神威

——两道关于圆锥曲线模考试题的思考与探究

李鑫明

（陕西师范大学附属中学，陕西 西安 710061）

解析几何综合题是每年高考的热点，也是重点和难点，对同学们的解题能力提出了较高的要求.本文将从两道关于圆锥曲线的模考试题出发，探索两种不同的解法，并揭示其背后所蕴含的极点极线的数学知识，为同学们解决解析几何问题提供更多的途径和方法.

（华大联考高2023届）已知A，B为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$左右两个顶点，动点$D$是椭圆上异于$A$，$B$的一点，点$F$是右焦点.当点$D$的坐标为$(-\sqrt{2},-1)$时，$DF=3$.

(1)求椭圆的方程；

(2)已知点C的坐标为$(4,0)$，直线CD与椭圆交于另一点E，判断直线AD与直线BE的交点P是否在一定直线上，如果是，求出该直线方程；如果不是，请说明理由.

（下转第13页）

（上接第11页）

（Ⅱ）① 在$n\geqslant 8$时，

$$P(\xi=2)=\frac{C_{n-1}^{n-3}}{C_n^{n-3}}\times\frac{1}{C_3^1}+\frac{C_{n-1}^{n-4}}{C_n^{n-3}}\times\frac{1}{C_{n-3}^1}=\frac{2}{n}.$$

$$P(\xi=3)=\frac{C_{n-1}^{n-3}}{C_n^{n-3}}\times\frac{C_2^1}{C_3^1}+\frac{C_{n-1}^{n-4}}{C_n^{n-3}}\times\frac{C_{n-4}^1}{C_{n-3}^1}\times\frac{1}{C_{n-4}^1}=\frac{3}{n}.$$

$$P(\xi=4)=\frac{C_{n-1}^{n-4}}{C_n^{n-3}}\times\frac{C_{n-4}^2}{C_{n-3}^2}\times\frac{1}{C_{n-5}^1}=\frac{1}{n}.$$

同理，当$4\leqslant k\leqslant n-4$时，

$$P(\xi=k)=\frac{C_{n-1}^{n-4}}{C_n^{n-3}}\times\frac{C_{n-4}^{k-2}}{C_{n-3}^{k-2}}\times\frac{1}{C_{(n-3)-(k-2)}^1}=\frac{1}{n},$$

$$P(\xi=n-3)=\frac{C_{n-1}^{n-4}}{C_n^{n-3}}\times\frac{C_{n-4}^{n-5}}{C_{n-3}^{n-5}}=\frac{2}{n}.$$

所以ξ的分布列为

ξ	2	3	4	…	$n-4$	$n-3$
P	$\frac{2}{n}$	$\frac{3}{n}$	$\frac{1}{n}$	…	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$

② 由①中ξ的分布列可得

$$E(\xi)=2\times\frac{2}{n}+3\times\frac{3}{n}+4\times\frac{1}{n}+5\times\frac{1}{n}+\cdots+(n-4)\times\frac{1}{n}+(n-3)\times\frac{2}{n}=\frac{n^2-3n+14}{2n}$$（次）.

点评 因为是非平均分组，所以$\xi\geqslant 4$的情况都是第一步检测结果为阳性（即$(n-3)$份血液样本混检为阳性）导致的，但是$\xi=n-3$时又有所不同，原因是当$\xi=n-3$时，可判断第$(\xi-1)$份或第ξ份样本为阳性，而当$4\leqslant\xi\leqslant n-4$时，只能判断第$(\xi-1)$份为阳性.所以当$4\leqslant k\leqslant n-4$时，可以归纳出$P(\xi=k)$的一般通项，而$P(\xi=n-3)$需要单独考虑.

结束语 混合检测中的有关概率问题涉及到不同的检测任务和不同的检测方法，从而会形成不同类型的概率问题，所以在解决该问题时一定要厘清题意，辨析概率模型，选择合适的方法.

（责审 马恩林）

（上接第12页）

解析 （1）由题意可易得椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

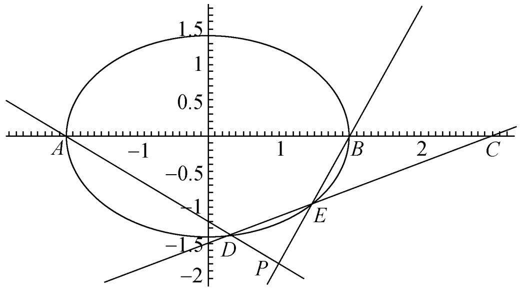

图1

（2）**解法一** 设 DE 的方程为 $y=k(x-4)$，联立椭圆方程，消去 y 得

$(2k^2+1)x^2-16k^2x+32k^2-4=0$，

设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{16k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{32k^2-4}{2k^2+1}$，

所以 $x_1+x_2=\frac{5}{2}x_1x_2-4$.

又 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，

直线 AD 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

直线 BE 的方程为 $y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

则 $\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

所以 $x_p=\frac{2x_1x_2-6x_1-2x_2}{3x_2-x_1-8}=\frac{5(x_1+x_2)-8-6x_1-2x_2}{3x_2-x_1-8}=\frac{-x_1+3x_2-8}{-x_1+3x_2-8}=1$，

所以直线 AD 和直线 BE 的交点在定直线 $x=1$ 上.

评注 这种设而不求的方法是比较常规且容易想到的方法，整个过程的难点在于计算量较大，为了简化计算，寻找到 x_1+x_2 和 x_1x_2 之间的数量关系，进而使得点 P 的横坐标表示没有 x_1 与 x_2 的交叉项，易于化简.当然，同学们也可以尝试直接解出 x_1,x_2 的值，进而解出点 P 的坐标，这样的想法更加直接且简单，但计算量非常大，对同学们的计算能力提出了较高的要求.

解法二 设 $D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，$\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{CE}$，

所以点 C 的坐标为 $\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$，

故 $\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=4$，$\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=0$，

即 $x_1+\lambda x_2=4(1+\lambda)$，$y_1+\lambda y_2=0$，

$$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1, \qquad ①$$

$$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{2}=1, \qquad ②$$

① $-\lambda^2$ ② 可得 $\frac{(x_1+\lambda x_2)(x_1-\lambda x_2)}{4(1+\lambda)(1-\lambda)}+\frac{(y_1+\lambda y_2)(y_1-\lambda y_2)}{2(1+\lambda)(1-\lambda)}=1$，

即 $\frac{x_1-\lambda x_2}{1-\lambda}=1$，即 $x_1-\lambda x_2=1-\lambda$，

因此 $x_1=\frac{3}{2}\lambda+\frac{5}{2}$，$x_2=\frac{3}{2\lambda}+\frac{5}{2}$.

由 $A(-2,0)$，$D(x_1,y_1)$ 可得

AD：$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，

BE：$y=\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)$，

联立两直线方程可得

$$1=\frac{\frac{y_2}{x_2-2}(x-2)}{\frac{y_1}{x_1+2}(x+2)}=\frac{y_2(x_1+2)}{y_1(x_2-2)}\cdot\frac{x-2}{x+2}=-\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\frac{3}{2}\lambda+\frac{9}{2}}{\frac{3}{2\lambda}+\frac{1}{2}}\cdot\frac{x-2}{x+2}=-3\cdot\frac{x-2}{x+2}.$$

化简可得 $x=1$.故点 P 在定直线 $x=1$ 上.

评注 上述的解题过程我们也称为定比点差法.若 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB}$,则点 P 的坐标为$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$,其中点 P 称为线段 AB 的定比分点,λ 为点 P 分$\overrightarrow{AB}$的比[1].本题中点 C,D,E 显然是共线的,因此定比点差法是适用的,而定比点差法的介入能极大地降低运算量.

背景分析 实际上这道问题的本质是圆锥曲线的极点极线知识.极点极线的定义如下:

几何定义 如图 2,P 是不在圆锥曲线上的点,过 P 点引两条割线依次交圆锥曲线于四点 E,F,G,H,连接 EH,FG 交于 M,连接 EG,FH 交于 N,则直线 MN 为点 P 对应的极线,若 P 为圆锥曲线上的点,则过 P 点的切线即为极线.

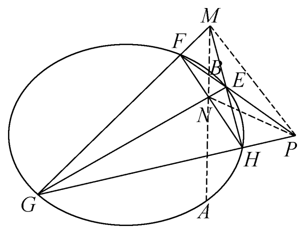

图 2

代数定义 已知圆锥曲线 Γ: $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$,则称点 $P(x_0,y_0)$和直线 l: $Ax_0x+Cy_0y+D(x+x_0)+E(y+y_0)+F=0$ 是已知圆锥曲线 Γ 的一对极点和极线[2].

我们再从极点极线的视角来思考这道问题,本题的图形语言如图 3 所示,根据极点极线的定义,不难发现点 C 与直线 PQ 为一对极点和极线,根据极点坐标为 $C(4,0)$以及椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$,可以得到极线 PQ 的方程为 $x=1$,故点 P 所在的直线方程为 $x=1$.

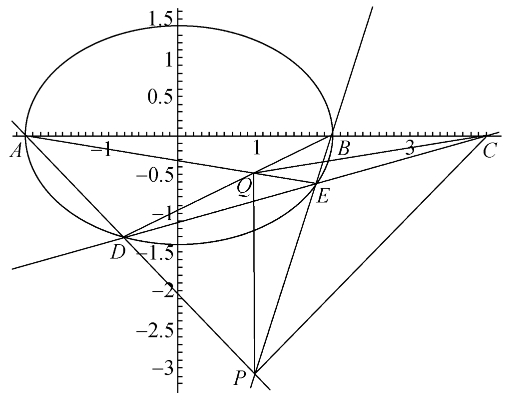

图 3

变式思考 其实问题的命制也可以变成,判断直线 AD 的斜率与直线 BE 的斜率之比是否为定值,即$\frac{k_{AD}}{k_{BE}}$是否为定值?

这样的考查与原本的问题在本质上是相同的,因为点 P 在定直线 $x=1$ 上,设 $P(1,y_0)$,则 $k_{AD}=k_{AP}=\frac{y_0}{1-(-2)}=\frac{y_0}{3}$,$k_{BE}=k_{BP}=\frac{y_0}{1-2}=-y_0$,$y_0\neq0$,则$\frac{k_{AD}}{k_{BE}}=-\frac{1}{3}$.

数学离不开解题.做题不在多而在精,题解得要精彩;对待解题的思想认识和方法要对头,要通过做题,深刻理解概念,扎实掌握基本知识,学会运筹帷幄,纵横捭阖,使自己的思维水平不断上升,高屋建瓴;只有这样,面对千变万化、面目各异的题目时,才能自如.

参考文献

[1] 郭润仙.定比点差法的应用:圆锥曲线中线段定比分点问题的探究[J].中学数学研究,2022,No.433(06):36-39.

[2] 王文彬.极点、极线与圆锥曲线试题的命制[J].数学通讯,2015,No.709(08):62-66.

(责审 王树文)