

一道收敛数列均值极限问题的探究式教学

杨金戈

(南昌工程学院 理学院, 江西 南昌 330099)

摘要 基于波利亚的阶段序进原理, 本文给出全国大学生数学竞赛中的一道收敛数列均值极限问题的教学设计方案. 该方案分为解题思路讲授与问题拓展教学两个部分. 在第一部分中, 举出一些具体实例使学生对问题形成直观感受, 并引出初步的解题思路, 进而通过归纳法引导学生写出一般的解题步骤, 以培养学生良好的解题习惯; 在第二部分, 从原问题出发, 不断延伸, 最终拓展至依概率收敛的随机变量序列的期望极限问题, 以强化学生对证明思想及问题本质的理解与掌握能力, 并提升学生综合运用知识能力.

关键词 阶段序进原理; 收敛数列均值极限; 依概率收敛; 期望

中图分类号 O171

文献标识码 A

文章编号 1008-1399(2023)06-0078-03

An Inquiry-based Teaching of the Mean Limit Problem of Convergent Sequence

YANG Jing

(School of Sciences, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China)

Abstract Based on Polya's principle of stage sequence progression, this paper presents a teaching design scheme for the problem of the mean limit of a convergent sequence in the National Mathematics Competition for college students. The scheme is divided into two parts: the teaching of problem-solving ideas and the teaching of problem expansion. In the first part, some concrete examples are cited to make students form intuitive feelings to the problem, and lead to the preliminary solution ideas, and then through induction to guide students to write the general solution steps, in order to cultivate students good problem-solving habits. In the second part, starting from the original problem, it is extended continuously and finally extended to the expectation limit problem of a sequence of random variables converging in probability.

Keywords Polya's principle of stage progression, the mean limit of a convergent sequence, convergence in probability, expectation

0 引言

人们对某一知识的学习过程总是遵从从特殊到一般的规律. 波利亚依此规律提出阶段序进原理^[1], 即将学习过程分为探索阶段、形式化阶段和同化阶段. 探索阶段为认识一些具体实例, 形成直观感受; 形式化阶段引入定义、证明等, 形成较抽象

的知识体系; 同化阶段, 将具有共同属性的实例归到知识体系中, 以便做出更一般的推广与延伸. 本文以第三届全国大学生数学竞赛预赛(非数学类)中的一道考查数列极限的试题为例, 探讨阶段序进原理在教学中的应用与实践.

原试题 设 $\{a_n\}$ 为数列, a, λ 为有限数, 求证:

(1) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a;$$

(2) 如果存在正整数 p , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+p} - a_n) = \lambda,$$

收稿日期: 2022-11-16

修改日期: 2023-09-01

基金项目: 南昌工程学院教学改革项目(2021SZJG0010).

作者简介: 杨金戈(1983-), 男, 山东聊城人, 博士, 副教授, 研究方向: 基础数学. Email: jgyang2007@yeah.net

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\lambda}{p}.$$

1 关于原试题解题思路的教学设计

1.1 第(1)问的教学设计

首先举几个例子,如 $a_n = 1$, $a_n = (1/2)^n$ 等,来验证第一问的正确性,进而使学生形成对此结论的直观感受,然后再以数列极限的严格定义^[2]给出证明.证明方法是规范的,为保证本文的完整性,我们给出证明.

第(1)问的证明 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,所以对任意正数 ϵ ,存在正整数 N ,当 $n > N$ 时,恒有 $|a_n - a| < \epsilon$.于是,存在正数 M ,使得对任意自然数 n ,均有

$$|a_n| \leq M.$$

为表述方便,记

$$A_n = \sum_{k=1}^n |a_k - a| / n.$$

则当 $n > N$ 时,有

$$\begin{aligned} A_n &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^N |a_k - a| + \frac{1}{n} \sum_{k=N+1}^n |a_k - a| \\ &\leq \frac{2NM}{n} + \frac{(n-N)\epsilon}{n}. \end{aligned}$$

故当 $n > \max\{\frac{2NM}{\epsilon}, N\}$ 时,有

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < 2\epsilon,$$

结论得证.

注1 上述证明采用了数列极限的 $\epsilon-N$ 定义.在证明过程中,综合使用了收敛数列的定义、有界性及绝对值不等式.将 A_n 划分为两部分来估计,其中一部分为数列的前 N 项的和,另外一部分为数列的后 $n-N$ 项的和,分别利用数列的有界性及收敛数列定义来作估计.

1.2 第(2)问的教学设计

下面来谈第(2)问的证明,依旧采取从特殊到一般的讲解方法.

先考虑最简单的 $p=1$ 的情况,已知条件变为 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = \lambda$.粗略地看,可认为 a_n 近似于一个公差为 λ 的等差数列,从而 $a_n \approx \lambda n + a_1$,结论容易理解.

从解题的角度看,第(1)问的结论一定是此问的提示.故可构造新数列 b_n 如下

$$b_n = \begin{cases} a_n - a_{n-1}, & \text{如果 } n \geq 2; \\ a_1, & \text{如果 } n = 1, \end{cases}$$

则新数列 b_n 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lambda$,且 $a_n = \sum_{k=1}^n b_k$,直接采用第(1)问的结果可推得结论.

再来考虑 $p=2$ 的情况,发现上述方法不能直接使用,主要原因是以上述方法取得的新数列的前 n 项和并不等于 a_n ,故将 n 分为奇数和偶数来考虑,即 $n=2m$ 和 $n=2m+1$,其中 m 为正整数.设

$$b_m = \begin{cases} a_{2m} - a_{2m-2}, & \text{如果 } m \geq 2; \\ a_2, & \text{如果 } m = 1, \end{cases}$$

则 $a_{2m} = b_m + b_{m-1} + \cdots + b_1$,采用第(1)问的结果可推得 $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m}/m = \lambda$.类似的方法可得 $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{2m+1}/m = \lambda$.从而结论得证.

由以上分析,对一般的自然数 p ,应将项数 n 按关于模 p 的同余类来分类讨论.故证明过程如下.

第(2)问的证明 设 $n = pm + k$,其中 $k=0,1,\dots,p-1$.对于固定的 k ,构造新数列

$$b_m = \begin{cases} a_{pm+k} - a_{p(m-1)+k}, & \text{如果 } m \geq 2; \\ a_{p+k}, & \text{如果 } m = 1; \end{cases}$$

则 $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = \lambda$.由第(1)问的结论可得

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{pm+k}}{m} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_m}{m} = \lambda.$$

从而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_{pm+k}}{pm+k} = \frac{\lambda}{p}.$$

因为 k 可取 0 到 $p-1$ 之间的所有整数,结论得证.

2 领会思想,逐步扩展

从原试题第(1)问的证明过程看,可以看出证明的关键在于将 A_n 分为两项来估计,每一项的估计实际上都使用了有界量乘以一个量.第一项的估计中由收敛数列的有界性可得 $\sum_{k=1}^N |a_k - a|$ 是有界量, $1/n$ 是无穷小;第二项的估计中数列收敛推得当 $n > N$ 时 $|a_k - a|$ 是一个小量, $(n-N)/n$ 是有界量.因此,我们对原问题进行如下拓展,供学生练习,以达到学生深度掌握证明思想的目的.前两个拓展摘自文献^[3].

拓展1 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$,且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f_k = +\infty$, $f_k \geq 0 (k=1,2,\dots,n)$,证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n f_k a_k}{\sum_{k=1}^n f_k} = a.$$

拓展 2 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $f_k \geq 0$ ($k=1, 2, \dots, n$) 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = 0.$$

证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1 a_n + f_2 a_{n-1} + \dots + f_n a_1}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = a.$$

拓展 3 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $p_{n,k} \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$;

$k=1, 2, \dots, n$), $\sum_{k=1}^n p_{n,k} = 1$, 且对任意自然数 k , 有

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n,k} = 0$. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n p_{n,k} a_k = a.$$

证明 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 故对任意正数 ϵ , 存在正整

数 N , 当 $n > N$ 时, 有 $|a_n - a| < \epsilon$. 由 $\sum_{k=1}^n p_{n,k} = 1$ 得

$$\left| \sum_{k=1}^n p_{n,k} a_k - a \right| = \left| \sum_{k=1}^n p_{n,k} (a_k - a) \right|.$$

从而

$$\left| \sum_{k=1}^n p_{n,k} a_k - a \right| \leq \left| \sum_{k=1}^N p_{n,k} (a_k - a) \right| + \left| \sum_{k=N+1}^n p_{n,k} (a_k - a) \right|.$$

由上式及收敛数列的有界性可得, 存在正数 M 使得

$$\left| \sum_{k=1}^n p_{n,k} a_k - a \right| \leq 2M \sum_{k=1}^N p_{n,k} + \epsilon.$$

由已知可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N p_{n,k} = 0$. 故存在 $N_1 > N$ 使得当 $n > N_1$ 时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^n p_{n,k} a_k - a \right| \leq 2\epsilon.$$

结论得证.

注 2 当 $p_{n,k} = f_k / \sum_{k=1}^n f_k$ 时, 拓展 3 即为拓展

1. 当 $p_{n,k} = f_{n+1-k} / \sum_{k=1}^n f_k$ 时, 拓展 3 为拓展 2. 因此拓展 3 是对拓展 1 和 2 的推广.

3 认识本质 高度推广

本节希望从概率的角度对原问题进行推广. 首先介绍随机变量序列依概率收敛的定义^[4].

定义 1 对任意正数 ϵ , 如果存在随机变量 X 使得随机变量序列 $\{X_n\}$ 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0,$$

则称 $\{X_n\}$ 依概率收敛.

接下来, 我们考虑一个收敛数列对应的离散随机变量序列的收敛性.

引理 1 设离散随机变量 X_n 为 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 对应的随机变量. 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 则 X_n 依概率收敛于 a .

证明 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 恒有 $|a_n - a| < \epsilon$. 所以

$$P(|a_n - a| > \epsilon) \leq \frac{N}{n} \rightarrow 0,$$

从而 X_n 依概率收敛于 a .

因此, 我们可以从研究对象、条件和结论三个角度来考虑原问题的推广. 从研究对象上看, 原问题考虑数列, 注意到一个数列可对应一离散随机变量序列, 故我们考虑随机变量序列, 包含随机变量序列和连续变量序列, 使研究对象极具一般性. 从条件上看, 由引理 1, 收敛数列对应的离散随机变量列一定依概率收敛, 故我们考虑条件为随机变量列依概率收敛. 从结论上看, 随机变量期望的概念是算术平均值概念的推广, 故考虑随机变量序列对应的期望序列的极限. 因此, 我们为学生设计的拓展问题如下.

拓展 4 设随机变量序列 $\{X_n\}$, X_n 依概率收敛于 a , $E(X_n^2)$ 一致有界. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n) = a$.

注 3 一个发散数列对应的随机变量序列也可能依概率收敛, 如 $X_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, 其中

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{如果 } n \text{ 是平方数;} \\ 1, & \text{其它情况.} \end{cases}$$

则 X_n 依概率收敛于 0. 事实上, 设 $\epsilon \in (0, 1)$, 对任意自然数 n , 总存在整数 m , 使得

$$m^2 \leq n < (m+1)^2.$$

从而

$$P(|X_n - 0| \geq \epsilon) \leq \frac{m+1}{n} \leq \frac{m+1}{m^2} \rightarrow 0.$$

但是, 显然可以看到 $\{a_n\}$ 极限不存在. 因此, 拓展 4 不仅从概率的角度推广了原问题, 而且从本质上弱化了条件.

拓展 4 的证明 按随机变量的类型分别讨论. 设 $\{X_n\}$ 为离散随机变量序列, 记 $X_n = \{x_{i,n}, i \in \Lambda_n\}$,

(下转第 90 页)

素,同样影响着学生的学习机会^[12].在后续的研究中,可以针对这一问题,深入展开对同济七版和Stewart八版的比较分析.

4.2.4 注重多样化的学习机会.

Stewart八版的习题数量远远超过了同济七版,而且题目在解题步骤数、答案类型、背景设置、以及数学认知水平四个题目特征上呈现出多样化的特点,旨在培养学生多样化的数学能力.章节中穿插的探索项目、应用项目、写作项目和实验项目也给学生提供了多样的学习机会.在将来的研究中,可以就Stewart八版中所有项目进行分类分析,从中学习如何针对高等数学知识点设计符合学生认知水平的多类学习项目.我国教材应该在编写中融入相关的项目,让学生在探索项目中培养学习兴趣,在应用项目中锻炼解决问题的能力,在写作项目中了解数学史和数学知识生成的过程,在实验项目中体验“做中学”.

参考文献

- [1] 田仕芹,王玉文.中美高等数学教材内容的比较—以美国宾夕法尼亚九版和中国同济七版为例[J].数学教育学报,2017,26(2):75-79.
- [2] Son, J. W., Senk, S. L. How Reform Curricula in the USA and Korea Present Multiplication and Division of Fractions [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2010, 74:117-142.
- [3] 刘玉波,汤大林,马仲立.关于美国微积分改革的思考[J].数学教育学报,2011(6):80-82.
- [4] Stigler, J. W., Fuson, K. C., Ham, M., Kim, M. S. An Analysis of Addition and Subtraction Word Problems in American and Soviet Elementary Mathematics Textbooks [J]. *Cognition and Instruction*, 1986(3):153-171.
- [5] Li, Y. A Comparison of Problems that Follow Selected Content Presentations in American and Chinese Mathematics Textbooks [J]. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2002, 31(2):234-241.
- [6] 张维忠,程孝丽.中国和澳大利亚教科书习题的数学认知水平比较—基于“高中函数”的分析[J].数学教育学报,2016,25(2):15-19.
- [7] Vinner, S. Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function [J]. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, 1983, 14(3):293-305.
- [8] Dahl, B. First-Year Non-STEM Major's Use of Definitions to Solve Calculus Tasks: Benefits of Using Concept Image over Concept Definition [J]. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 2017, 15:1303-1322.
- [9] 郭镜明,朱小平,应明.交流互补,融合提高—中美微积分教材内容的比较[J].高等数学研究,2006,9(1):6-10.
- [10] 郭毅,龙兰,张正平,王蕾.从中美比较谈高等数学课堂教学改革与实践[J].重庆科技学院学报,2014(5):161-164.
- [11] 郭镜明,应明,朱小平.美国微积分教材中的习题配置特色[J].大学数学,2005,021(002):13-16.
- [12] Bressoud, David, Ghedamsi, Imene. *Teaching and Learning of Calculus* [M]. Springer International Publishing, 2016.

(上接第80页)

其中 Λ_n 为指标集. 设 $x_{i,n}$ 对应的概率为 $p_{i,n}$, 则 $E(X_n) = \sum_{i \in \Lambda_n} x_{i,n} p_{i,n}$, 从而对任意 $\epsilon > 0$, 有

$$\begin{aligned} |E(X_n) - a| &= \left| \sum_{|x_{i,n}-a|<\epsilon} (x_{i,n}-a)p_{i,n} \right| + \left| \sum_{|x_{i,n}-a|\geq\epsilon} (x_{i,n}-a)p_{i,n} \right| \\ &\leq \epsilon + \left| \sum_{|x_{i,n}-a|\geq\epsilon} (x_{i,n}-a)p_{i,n} \right|. \end{aligned}$$

利用柯西-施瓦兹不等式及 $E(X_n^2)$ 一致有界得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|x_{i,n}-a|\geq\epsilon} (x_{i,n}-a)p_{i,n} \right| &\leq (E(X_n^2))^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|x_{i,n}-a|\geq\epsilon} p_{i,n} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M \left(\sum_{|x_{i,n}-a|\geq\epsilon} p_{i,n} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

由 X_n 依概率收敛于 a , 故存在正整数 N , 当项数 $n > N$ 时, 有

$$\left(\sum_{|x_{i,n}-a|\geq\epsilon} p_{i,n} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{\epsilon}{M}.$$

从而当 $n > N$ 时, $|E(X_n) - a| < 2\epsilon$. 结论得证.

设 $\{X_n\}$ 为连续型随机变量序列, 其对应的概率

密度序列为 $p_n(x)$. 则

$$\begin{aligned} |E(X_n) - a| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)p_n(x)dx \right| \\ &= \left| \left(\int_{|x-a|<\epsilon} + \int_{|x-a|\geq\epsilon} \right) (x-a)p_n(x)dx \right| \\ &\leq \epsilon + \int_{|x-a|\geq\epsilon} (x-a)p_n(x)dx \\ &\leq \epsilon + E(X_n^2)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{|x-a|\geq\epsilon} p_n(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

余下的证明与第一种情形类似, 我们省略它.

参考文献

- [1] 波利亚. 数学的发现. 2: 对解题的理解、研究和讲授 [M]. 北京: 科学出版社, 1987.
- [2] 华东师范大学数学系. 数学分析 [M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [3] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [4] 茆诗松, 濮晓龙, 程依明. 概率论与数理统计简明教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.