极点、极线调和性视角下的高考试题分析

卢恩良[1]　黄　芳[2]

(1.江西省九江市第三中学　2.江西省湖口中学)

在近几年高考中，以极点、极线知识为背景的试题频繁出现，这是学生学习的难点，也是教师教学的巨大的挑战.解析几何中的定点问题是高考的热点，因其逻辑推理要求高，数学运算量大，成为学生学习的难点.本文介绍极点、极线的调和性以及调和线束的性质，剖析高考命题人如何据此设计试题，以便能较快地得到答案，降低思维难度，增强学生信心.

1　几个概念和性质

调和点列：对于线段 AB 的内分点 C 和外分点 D，若满足 $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}$，则称点 C，D 调和分割线段 AB，即点列 A，C，B，D 成调和点列，如图 1 所示.调和线束：若直线 l 上四点 A，C，B，D 成调和点列，任取一点 $O\notin l$，则直线 OA，OC，OB，OD 成调和线束.

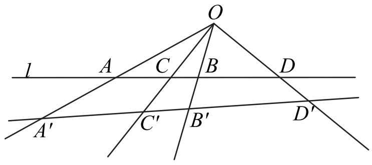

图 1

任意直线 l' 交调和线束 OA，OC，OB，OD 于点 A'，C'，B'，D'，则点列 A'，C'，B'，D' 也成调和点列.

性质 1　直线 OA，OC，OB，OD 成调和线束，记直线 OA，OC，OB，OD 的斜率分别为 k_1，k_2，k_3，k_4，则 $\frac{k_2-k_1}{k_4-k_1}=\frac{k_2-k_3}{k_3-k_4}$.

证明　如图 2 所示，不妨记直线 OA，OC，OB，OD 与 x 轴分别交于点 A，C，B，D，则 A，C，B，D 四

3.2　重视数学素养与建模能力的培养

1)勤思考，重理解

数学源于对现实世界的抽象，基于抽象结构，通过符号运算、形式推理、模型构建等，理解和表达现实世界中事物的本质、关系和规律.这就要求学生在数学学习过程中亲自参与数学知识的发生、发展过程中，只有这样才能深入了解数学知识的来龙去脉.

2)善于总结与反思

数学能力的培养绝非一朝一夕之功，需要学生反复理解定义、定理的内涵与本质，温故而知新.在每次回归课本的过程中都可能产生新的理解与感悟，这时需要及时将经验总结记录下来，填充进数学知识网络中，扎牢数学基本功.学生在运用数学知识过程中，碰到了易错点与重难点，也需要及时总结，将类似的题目归类并进行反思总结，体会题目的命题意图、考查的知识点、解题的逻辑过程、渗透的数学思想等，并举一反三.学生可以运用“费曼学习法”将自己的解题感悟主动分享给有需要的同学，在复述讲解的过程中深化对知识的理解，若讲解过程中出现困难，则说明对该部分的知识理解不够深入，这样也为日后的复习提供了方向.

3)多动手，勤建模

纵观 2023 年高考数学试题，新高考在数学建模核心素养上的考查力度比全国卷大，体现了新课标对数学建模的重视程度.该类试题的考查目的不仅仅是考查学生对基础知识的理解，更多的是结合生活情境考查学生的数学建模核心素养，要求学生能够有意识地用数学语言表达现实世界，发现和提出问题，感悟数学与现实之间的关联.学生在掌握一定知识的基础上，应切身体会用数学模型解决实际问题的全过程，迁移运用所学知识，积累数学建模实践的经验，增强创新意识和科学精神.此外，鉴于高考常以跨学科知识为背景进行命题，学生应广泛涉猎科学、社会、医疗、工程技术等诸多领域的知识，感悟跨学科的交融，用数学的眼光观察现实世界，用数学的思维思考现实世界，用数学的语言表达现实世界.

(完)

点成调和点列，满足$\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{BC}{BD}$.作$OM\perp x$轴，垂足为$M$.由图可得$\dfrac{AM-CM}{AM-DM}=\dfrac{CM-BM}{BM-DM}$，即$\dfrac{\dfrac{OM}{k_1}-\dfrac{OM}{k_2}}{\dfrac{OM}{k_1}-\dfrac{OM}{k_4}}=\dfrac{\dfrac{OM}{k_2}-\dfrac{OM}{k_3}}{\dfrac{OM}{k_3}-\dfrac{OM}{k_4}}$，整理得$\dfrac{k_2-k_1}{k_4-k_1}=\dfrac{k_2-k_3}{k_3-k_4}$.

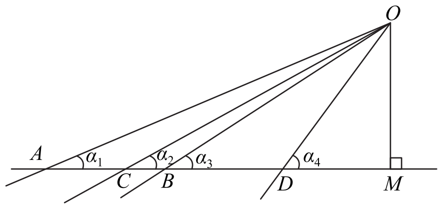

图 2

以上证明仅说明斜率为正的情况下，实际上对直线斜率的其他情况也是成立的，感兴趣的读者可尝试证明.

性质 2　若一条直线与调和线束中的某条线平行，则它与其他三条线相交得到的三个点存在中点关系.

证明　如图 3 所示，已知A,C,B,D四点成调和点列，过点A的直线m平行于直线OB，与直线OC,OD分别交于点M,N，下证A是线段MN的中点.

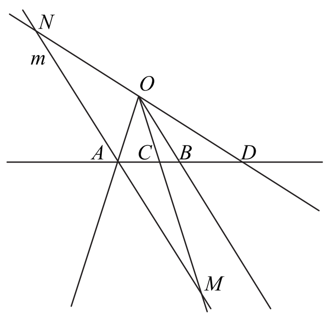

图 3

因为A,C,B,D四点成调和点列，所以$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BD}$.因为$m\parallel OB$，所以$\triangle ACM\backsim\triangle BCO$，$\triangle AND\backsim\triangle BOD$，故$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AM}{BO}$，$\dfrac{AN}{BO}=\dfrac{AD}{BD}$.又$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BD}$，所以$\dfrac{AM}{BO}=\dfrac{AN}{BO}$，即$AM=AN$，$A$为线段$MN$的中点.

性质 3　当点P不在椭圆上时，过点P的直线l与椭圆交于A,B两点，与P对应的极线交于点Q，如图 4 所示，则点P,A,Q,B成调和点列.

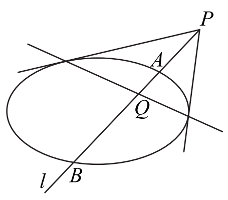

图 4

2　高考真题剖析

2022 年和 2023 年全国乙卷解析几何解答题一脉相承，以极点、极线知识为背景，考查定点问题.教师既要以“接地气”的方式讲解试题，又要站在更高的视角研究试题，让学生在掌握基本方法的基础上有一定的知识拓展.

例 1　（2023 年全国乙卷理 20）已知椭圆C：$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的离心率是$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，点$A(-2,0)$在$C$上.

（1）求C的方程；

（2）过点$(-2,3)$的直线交C于P,Q两点，直线AP,AQ与y轴的交点分别为M,N，证明：线段MN的中点为定点.

解　（1）$\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$（求解过程略）.

（2）**解法 1**　由题意可知直线PQ的斜率存在，设直线PQ的方程为$y=kx+m$，则$m-2k=3$.联立$\begin{cases}y=kx+m,\\4y^2+9x^2-36=0,\end{cases}$得

$$(4k^2+9)x^2+8mkx+4m^2-36=0.$$

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，所以$x_1+x_2=-\dfrac{8mk}{4k^2+9}$，$x_1x_2=\dfrac{4m^2-36}{4k^2+9}$.易知直线$AP$方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1+2}(x+2)$，令$x=0$，得$y_M=\dfrac{2y_1}{x_1+2}$；同理，可得$y_N=\dfrac{2y_2}{x_2+2}$.因为线段$MN$的中点的纵坐标为

$$\frac{y_M+y_N}{2}=\frac{y_1}{x_1+2}+\frac{y_2}{x_2+2}=$$

$$\frac{(kx_1+m)(x_2+2)+(kx_2+m)(x_1+2)}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=$$

$$\frac{2kx_1x_2+(2k+m)(x_1+x_2)+4m}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=$$

$$\frac{\dfrac{8km^2-72k}{4k^2+9}-\dfrac{16mk^2+8km^2}{4k^2+9}+4m}{\dfrac{4m^2-36}{4k^2+9}-\dfrac{16mk}{4k^2+9}+4}=$$

$$\frac{9m-18k}{m^2-4mk+4k^2}=\frac{9(m-2k)}{(m-2k)^2}=\frac{9}{m-2k}=3,$$

所以线段MN的中点为定点$(0,3)$.

点评　解法 1 属于常规解法，虽然对学生思维要求低，但对学生数学运算素养要求较高.若注意

到直线 PQ 过定点 $T(-2,3)$，由此入手，则会发现不一样的"风景".下面从高等数学视角提供解法 2.

解法 2 如图 5 所示，不妨记椭圆的上顶点为 $B(0,3)$，点 $T(-2,3)$，则点 T 对应的极线即为直线 AB：$\frac{3y}{9}+\frac{-2x}{4}=1$，记直线 PQ 与极线 AB 交于点 E. 由性质 3 可知点列 T,P,E,Q 为调和点列.因为 $A\notin PQ$，所以直线 AT,AP,AE,AQ 为调和线束.而直线 $AT\parallel y$ 轴，且直线 AP,AE,AQ 与 y 轴依次交于点 M,B,N，由性质 2 可知 B 为 MN 的中点，故线段 MN 的中点为定点 $(0,3)$.

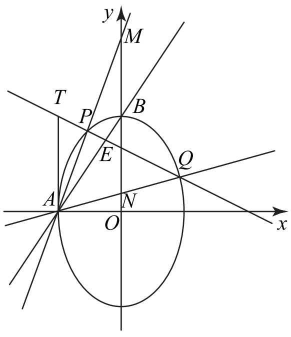

图 5

点评 试题实质是极点、极线的调和性，我们可以记忆为"中点模型".如果我们把调和线束 AT,AP,AE,AQ 的斜率依次记为 k_1,k_2,k_3,k_4，由性质 1 有 $\frac{k_2-k_1}{k_4-k_1}=\frac{k_2-k_3}{k_3-k_4}$.在本题中，$k_1$ 不存在(理解为无穷)，$k_3=k_{AB}=\frac{3}{2}$.由洛必达法则知 $\lim\limits_{k_1\to\infty}\frac{k_2-k_1}{k_4-k_1}=1$，所以 $\frac{k_2-k_3}{k_3-k_4}=1$，$k_2+k_4=2k_3=3$，即直线 AP,AQ 的斜率之和为定值 3.此时的 $k_2+k_4=2k_3$ 情形我们可以记忆为"斜率等差模型".因此，试题还可改编为"证明：直线 AP,AQ 的斜率之和为定值".下面从研究直线斜率的角度提供解法 3.

解法 3 设直线 AP 的方程为 $y=k_1(x+2)$，直线 AQ 方程为 $y=k_2(x+2)$，易得 $y_M=2k_1$，$y_N=2k_2$，所以线段 MN 的中点坐标为 $(0,k_1+k_2)$.

易知直线 PQ 不经过点 $A(-2,0)$，则可设直线 PQ 的方程为 $m(x+2)+ny=1$，又直线 PQ 经过点 $(-2,3)$，所以 $3n=1$，$n=\frac{1}{3}$.联立

$$\begin{cases}m(x+2)+\frac{y}{3}=1,\\4y^2+9[(x+2)-2]^2-36=0,\end{cases}$$

整理得 $4y^2+9(x+2)^2-36(x+2)=0$，将 $m(x+2)+\frac{y}{3}=1$ 代入，有 $4y^2+9(x+2)^2-36(x+2)\cdot\left[m(x+2)+\frac{y}{3}\right]=0$，整理得 $4y^2-12(x+2)y+(9-36m)(x+2)^2=0$，易知 $x\neq-2$，两边同时除以 $(x+2)^2$，得 $4\left(\frac{y}{x+2}\right)^2-\frac{12y}{x+2}+9-36m=0$，故 $k_1+k_2=3$.

综上，线段 MN 的中点为 $(0,3)$.

点评 齐次化方法是研究圆锥曲线上两条共点直线斜率关系的有效方法.一般地，设不经过点 (x_0,y_0) 的直线的方程为 $m(x-x_0)+n(y-y_0)=1$.

例 2 (2022 年全国乙卷理 20)已知椭圆 E 的中心为坐标原点，对称轴为 x 轴、y 轴，且过 $A(0,-2)$，$B\left(\frac{3}{2},-1\right)$ 两点.

(1)求 E 的方程；

(2)设过点 $P(1,-2)$ 的直线交 E 于 M,N 两点，过 M 且平行于 x 轴的直线与线段 AB 交于点 T，点 H 满足 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，证明：直线 HN 过定点.

解 (1)$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$(求解过程略).

(2)**解法 1** 如图 6 所示，容易求得直线 AB 的方程为 $y=\frac{2}{3}x-2$，点 $P(1,-2)$ 对应的极线为 $\frac{-2y}{4}+\frac{x}{3}=1$，即为直线 AB，所以点 P 与直线 AB 为对应的极点和极线.记直线 MN 与极线 AB 交于点 S.由性质 3 可知点列 P,M,S,N 为调和点列.因为 $A\notin MN$，所以直线 AP,AM,AS,AN 为调和线束.因为 $MT\parallel AP$，且直线 MT 与直线 AM,AS,AN 依次交于点 M,T,H'，由性质 2 可知 T 为 MH' 的中点.因为 $\overrightarrow{MT}=\overrightarrow{TH}$，所以 T 为 MH 的中点，即 H 与 H' 重合，点 H 在直线 AN 上，直线 HN 过定点 $A(0,-2)$.

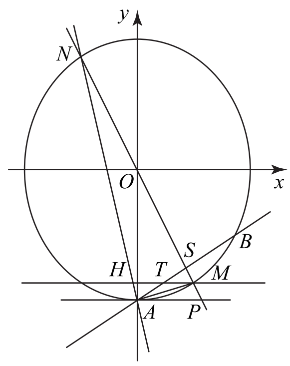

图 6

点评 例 2 与例 1 本质一致，也是依据"中点模型"设计试题，方法独特.我们把调和线束 AP,AM,AS,AN 的斜率依次记为 k_1,k_2,k_3,k_4，由性质 1 有 $\frac{k_2-k_1}{k_4-k_1}=\frac{k_2-k_3}{k_3-k_4}$.在本题中，$k_1=0$，$k_3=k_{AB}=\frac{2}{3}$，故 $\frac{k_2}{k_4}=\frac{k_2-k_3}{k_3-k_4}$，整理得 $\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_4}=\frac{2}{k_3}=3$，蕴含着"斜率倒数等差模型".因此，试题还可改编为"证明：存在实数 λ，使得 $k_2+k_4=\lambda k_2k_4$ 成立".仿照例 1 的解法 3，

下面采用齐次化方法研究直线的斜率.

解法2 设直线 MN 的方程为 $x-t(y+2)=1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，将椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 化为

$$4x^2+3(y+2)^2-12(y+2)=0,$$

将 $x-t(y+2)=1$ 代入，有

$$4x^2+3(y+2)^2-12(y+2)[x-t(y+2)]=0,$$

整理得 $4x^2+(3+12t)(y+2)^2-12x(y+2)=0$，易知 $y\neq-2$，则 $4\left(\frac{x}{y+2}\right)^2-\frac{12x}{y+2}+3+12t=0$，所以 $\frac{1}{k_{AM}}+\frac{1}{k_{AN}}=3$.易知 $k_{AT}=\frac{y_T-y_A}{x_T-x_A}=k_{AB}=\frac{2}{3}$，因为 $k_{AH}=\frac{y_A-y_H}{x_A-x_H}=\frac{y_A-y_T}{x_A-x_H}$，$k_{AM}=\frac{y_A-y_M}{x_A-x_M}=\frac{y_A-y_T}{x_A-x_M}$，所以 $\frac{1}{k_{AH}}+\frac{1}{k_{AM}}=\frac{2x_A-(x_M+x_H)}{y_A-y_T}$.因为 T 是线段 HM 的中点，所以 $2x_T=x_H+x_M$，即

$$\frac{1}{k_{AH}}+\frac{1}{k_{AM}}=\frac{2(x_A-x_T)}{y_A-y_T}=\frac{2}{k_{AT}}=3.$$

由以上可知 $\frac{1}{k_{AM}}+\frac{1}{k_{AN}}=\frac{1}{k_{AH}}+\frac{1}{k_{AM}}=3$，即 $k_{AH}=k_{AN}$，所以直线 HN 过定点 $A(0,-2)$.

点评 比较例1和例2，发现两者的区别在于调和线束中一条直线水平，一条直线竖直，而且都有一条斜率固定的直线，从而两题结论略有区别："斜率倒数等差模型"和"斜率等差模型".

全国卷高考经常以极点极线知识为背景设计试题，地方卷也是如此.下面从极点极线与调和性的角度再分析两道北京高考题.

例3 （2022年北京卷19）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $A(0,1)$，焦距为 $2\sqrt{3}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）过点 $P(-2,1)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B，C，直线 AB，AC 分别与 x 轴交于点 M，N，当 $|MN|=2$ 时，求 k 的值.

简析 （1）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）如图7所示，设椭圆的左顶点为 $T(-2,0)$，点 $P(-2,1)$ 对应的极线方程为 $\frac{-2x}{4}+y=1$，即直线 AT.记直线 BC 与直线 AT 交于点 Q，则 P，B，Q，C 成调和点列，直线 AP，AB，AQ，AC 成调和线束.因为直线 AP 平行于 x 轴，直线 AB，AQ，AC 与 x 轴依次交于点 M，T，N，由性质2知点 $T(-2,0)$ 是 MN 的中点.当 $|MN|=2$ 时，$|TM|=|TN|=1$.不妨取 $N(-1,0)$，则直线 AN 的方程为 $y=x+1$.联立直线 AN 与椭圆 E 的方程，解得点 C 的坐标为 $\left(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5}\right)$，所以直线 BC 的斜率 $k=-4$.

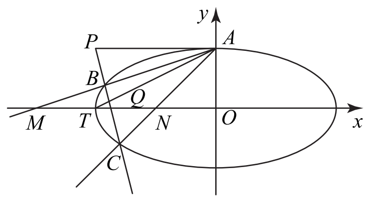

图7

例4 （2020年北京卷20）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(-2,-1)$，且 $a=2b$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 $B(-4,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于点 M，N，直线 MA，NA 分别交直线 $x=-4$ 于点 P，Q，求 $\frac{|PB|}{|BQ|}$ 的值.

简析 （1）$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）如图8所示，点 $B(-4,0)$ 对应的极线为 $x=-2$.设直线 l 与极线 $x=-2$ 交于点 T，则点 B，N，T，M 成调和点列，直线 AB，AN，AT，AM 成调和线束.因为直线 $x=-4$ 与直线 AT 平行，且与直线 AM，AB，AN 依次交于点 P，B，Q，所以点 B 是 PQ 的中点，即 $\frac{|PB|}{|BQ|}=1$.

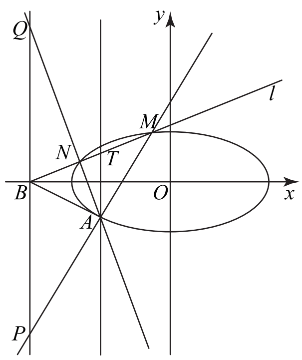

图8

以上两道北京高考题如出一辙，均以性质2为命题依据.2020年的北京高考题考查比较"直白"，容易猜到是中点关系，2022年的北京高考题另辟蹊径，试题隐藏着中点关系，问题却是求值，别出心裁.

3 小结

通过对以上高考真题的研究，发现很多解析几何试题都是以极点、极线知识的相关性质为背景设计的.虽然极点、极线的知识不属于高考考查范围要求，但是若能掌握相关知识，可以帮助教师和学生拓宽视野，打开思路，培养学生自主探究数学问题的能力.

（完）