选用合适的方法，求解数列的通项公式

宋琳琳

通项公式是数列的一种表示形式.通过递推关系式，往往可以求出该数列的通项公式.求数列的通项公式问题对同学们的逻辑推理与数学运算能力有较高的要求.当递推关系式比较复杂时，很多同学不知该如何下手.下面介绍几种常用的方法，供大家参考.

一、累加法

累加法也叫叠加法.当遇到形如$a_n-a_{n-1}=f(n)(n\geq2$，且$n\in\mathbf{N}^*)$的递推关系式时，可先将数列的各式累加，使等式左侧的前后两项相互抵消，只剩下第一项(a_1)与最后一项(a_n)，即$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$；再对右侧的式子进行求和，即可求得$a_n$.

例1. 在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4n^2-1}$，则该数列的通项公式$a_n=$_____.

解： 因为$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$，

所以$(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)$

$=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\right]$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)$，

所以$a_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{4n-3}{4n-2}$.

在累加消项时，应注意消项的规律，明确要消去哪些项，保留哪些项，才能确保得到正确的结果.

二、累乘法

累乘法也叫叠乘法.对于形如$\frac{a_n}{a_{n-1}}=f(n)$型的递推公式，一般用累乘法求数列的通项公式.当$f(n)=q$为常数且不等于0时，该数列为等比数列，此时数列的通项公式为$a_n=a_1\cdot q^{n-1}$；当$f(n)$为关于n的函数时，$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=f(n-1)\cdot f(n-2)\cdot\cdots\cdot f(1)\cdot a_1$.将数列的各式累乘时，需使等式左侧的前后两项相约，最后只剩下第一项(a_1)与最后一项(a_n)的比值.

例2. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{na_n}{2}$.求数列$\{a_n\}$的通项公式；

解：(1)由$S_n=\frac{na_n}{2}$可得$S_{n-1}=\frac{(n-1)a_{n-1}}{2}(n\geq2)$，

将两式相减得：$a_n=\frac{na_n}{2}-\frac{(n-1)a_{n-1}}{2}$，

整理得：$(n-2)a_n=(n-1)a_{n-1}$，

因为$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}(n\geq3)$，

所以$\frac{a_3}{a_2}=2,\frac{a_4}{a_3}=\frac{3}{2},\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n-1}{n-2}$，

将各式累乘得$\frac{a_n}{a_2}=n-1$，

当n=1,2时，满足此式，所以$a_n=(n-1)a_2$.

令n=,2,3,…,n，并将这n-1个式子累乘，即可消去$a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_4,a_3$，得到$\frac{a_n}{a_2}=n-1$，进而求得$a_n$的表达式.

三、构造法

构造法是求数列通项公式的常用方法.运用构造法解题，需将递推关系式进行合理的变形，把某一部分看成一个整体，构造出等差数列或等比数列，以利用等差、等比数列的通项公式解题.

例3. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$\sqrt{\frac{1}{a_n^2}+2}=\frac{1}{a_{n+1}}(n\in\mathrm{N}^*)$，记$b_n=\frac{1}{a_n^2\cdot2^n}$，则数列$\{b_n\}$的前$n$项和$S_n=$_____.

解： 因为$\sqrt{\frac{1}{a_n^2}+2}=\frac{1}{a_{n+1}}$得$\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}=2$，

且$\frac{1}{a_1^2}=1$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$是以1为首项,2为公差的等差数列,

所以$\frac{1}{a_n^2}=1+(n-1)\times2=2n-1$,

从而得到$a_n^2=\frac{1}{2n-1}$,则$b_n=\frac{2n-1}{2^n}$,

所以$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^n}+\frac{2n-1}{2^{n+1}}$,

将两式相减,

得$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$

$=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2}-\frac{2n+3}{2^{n+1}}$,

所以$S_n=3-\frac{2n+3}{2^n}$.

将已知递推关系式平方、移项,即可得到$\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}=2$.根据等差数列的定义可判定该数列是以1为首项、2为公差的等差数列.这样便构造出等差数列$\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$,根据等差数列的通项公式和错位相减法即可求得问题的答案.

例4. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$,且$a_n=\frac{2na_{n-1}}{a_{n-1}+n-1}$ $(n\geq2,n\in N^*)$,则$a_n=$____.

解: 由$a_n=\frac{2na_{n-1}}{a_{n-1}+n-1}(n\geqslant2,n\in N^*)$得$\frac{n}{a_n}=\frac{n-1}{2a_{n-1}}+\frac{1}{2}$,

于是$\frac{n}{a_n}-1=\frac{1}{2}(\frac{n-1}{a_{n-1}}-1)(n\geqslant2,n\in N^*)$,

又$\frac{1}{a_1}-1=-\frac{1}{2}$,

所以数列$\{\frac{n}{a_n}-1\}$是以$-\frac{1}{2}$为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列,

于是$\frac{n}{a_n}-1=-\frac{1}{2^n}$,

所以$a_n=\frac{n\cdot2^n}{2^n-1}$,

因为$a_1=2$也满足该式,

所以数列的通项公式为$a_n=\frac{n\cdot2^n}{2^n-1}$.

用构造法求数列的通项公式,要先仔细观察递推关系式,对其进行合理的变形,构造出新数列;再确定新数列的首项、公差、公比.在求出数列的通项公式后,还需对首项加以检验,如果不满足所求的通项公式,就应分段表示数列的通项公式.

四、利用S_n与a_n的关系

我们知道,当$n\geqslant2,n\in N^*$时,数列的前n项和S_n与通项公式a_n的关系为$a_n=S_n-S_{n-1}$.所以当题目中给出的递推关系式中同时含有S_n与a_n时,要先利用S_n与a_n的关系消去S_n,再通过化简求得数列的通项公式.

例5. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=1-a_n$,其中$n\in N^*$.

(I)求$\{a_n\}$的通项公式;

(II)若$b_n=na_n$,求$\{a_n\}$的前n项和S_n.

解:(I)当$n=1$时,$S_1=1-a_1$,解得$a_1=\frac{1}{2}$,

当$n\geqslant2$时,$a_n=S_n-S_{n-1}=(1-a_n)-(1-a_{n-1})=a_{n-1}-a_n$,

化简整理得$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}(n\geqslant2)$,

因此数列$\{a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为首项,$\frac{1}{2}$为公比的等比数列.

从而可得$a_n=(\frac{1}{2})^n$,

(II)由(I)可得,$b_n=na_n=\frac{n}{2^n}$,

则$S_n=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

$\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

则 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=\frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

所以$S_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

由S_n与a_n的关系求数列的通项公式时,应注意:(1)要重视分类讨论思想的应用,分$n=1$和$n\geqslant2$两种情况讨论;(2)要注意S_n与a_n互化的双向性,既可由a_n求S_n,又可由S_n求a_n.

以上四种方法都比较常用,运用每种方法解题,都需灵活运用转化思想,对递推关系式进行合理的变形,将问题转化为简单、易于计算的问题,这样才能化难为易,化繁为简.

(作者单位:江苏省石庄高级中学)