“三招”解决数列不等式问题

于晓静(山东省青岛市城阳第三高级中学　266112)

【摘　要】　对于导数中数列不等式的证明问题,主要有三种求解思路:逐项比较大小,利用数列的单调性,数列放缩.在证明数列不等式问题时要具体问题具体分析,从要求的数列本身或者与之比较的表达式两个方面入手.

【关键词】　高中数学;导数;数列不等式

在证明具体的数列不等式时,第一步,观察数列的特征,选择合适的解题思路;第二步,如果题目中有其他小问,可以以其他小问的已知结果为方向寻找解题方法;第三步,在证明完毕后,确认所证明的数列不等式的 n 的取值范围是符合题目条件的.本文将在此基础上进行总结归纳,依据实例展现常用的解题思路.

思路1　逐项比较大小

要证明累加或者累乘形式的数列不等式,如果在整体的角度上难以分析,就可以转换视角,研究数列单项与所要比较的表达式的单项的大小关系.运用此思路解题时,关键是如何正确表示出所要比较的表达式的单项,不同的表示方法会在运算难度上有所不同,此外还需要注意 n 的范围的对应.

例1　已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a-1}{x}+2a(a\in\mathbf{R})$,求解下列问题:

(1)若在 $[1,+\infty)$ 上不等式 $f(x)\leqslant ax+1$ 恒成立,求参数 a 的取值范围;

(2)若 $n\in\mathbf{N}^*$,证明不等式:$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{n}{2(n+1)}$.

解析　(1)a 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

(2)将不等式改写为

$\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,

将 $\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}$ 视为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和,可求得 $b_n=\ln\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$.

只需要证明 $\ln\frac{n+1}{n}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{n}$,

即证明 $\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$.

设 $x=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}>1$,

则只需要证明 $\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)(x>1)$.

在第(1)问的基础上,取 $a=\frac{1}{2}$,

则有 $\ln x\leqslant\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)(x\geqslant1)$,

当且仅当 $x=1$ 时等号成立,

所以 $\ln x<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)(x>1)$ 成立.

从而 $\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$,

$\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)$,

……

$\ln2-\ln1<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)$.

将以上不等式累加,得到 $\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{n}{2(n+1)}$,不等式得证.

思路2　利用数列的单调性

数列作为一种特殊的函数,利用函数的特性去研究也是常用的思路.函数的一个重要性质就是单调性,而研究数列也可以从这方面入手.通过对数列进行求导研究,找到数列不同的 n 的范围内的单调性,即可比较.

例2　设函数 $f(x)=(x-1)^2+b\ln x$，其中 b 为常数，求解下列问题：

(1) 指出函数 $f(x)$ 在定义域上的单调性；

(2) 求证不等式：$\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\ln(n+1)(n\geqslant 3,n\in\mathbf{N}^*)$.

解析　(1)① 当 $b\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

② 当 $0<b<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1-\sqrt{1-2b}}{2}\right)$，$\left(\frac{1+\sqrt{1-2b}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，

在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-2b}}{2},\frac{1+\sqrt{1-2b}}{2}\right)$ 上单调递减；

③ 当 $b\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1+\sqrt{1-2b}}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1+\sqrt{1-2b}}{2},+\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 设 $b_n=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\ln(n+1)0$，

则 $b_3=\frac{1}{9}-\ln 4<0$.

当 $n\geqslant 3$ 且 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{(n+1)^2}-\ln\frac{n+2}{n+1}$.

设 $x=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}\in\left(1,\frac{5}{4}\right]$，

要证明 $b_{n+1}-b_n<0$，

只需要证明 $(x-1)^2-\ln x<0$.

取 $b=-1$，由 (1) 可知此时 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ 上单调递减.

而 $\frac{5}{4}<\frac{1+\sqrt{3}}{2}$. 即当 $x\in\left(1,\frac{5}{4}\right]$ 时，

$f(x)=(x-1)^2-\ln x<f(1)=0$，

从而 $b_{n+1}-b_n<0$ 成立，即数列 $\{b_n\}$ 单调递减，$b_n\leqslant b_3<0$，不等式得证.

思路3　数列放缩

数列放缩的原理类似于逐项比较，但是不同的是，此思路主要适用于难以将数列不等式的单项直接与所要比较的表达式的单项进行比较的题目. 此时就可以将数列不等式的单项进行放缩，找到一个合适的中间不等式，夹在两者中间，且便于看出大小关系即可.

例3　已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

(1) 若在区间 $(0,+\infty)$ 上不等式 $kx\geqslant f(x)$ 恒成立，求 k 的取值范围；

(2) 求证：$\frac{\ln 2}{2^4}+\frac{\ln 3}{3^4}+\cdots+\frac{\ln n}{n^4}<\frac{1}{2\mathrm{e}}$.

解析　(1) 实数 k 的取值范围为 $\left[\frac{1}{2\mathrm{e}},+\infty\right)$.

(2) 取 $k=\frac{1}{2\mathrm{e}}$，由题(1) 可得 $\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{x}{2\mathrm{e}}$，

即 $\frac{\ln x}{x^4}\leqslant\frac{1}{2\mathrm{e}}\cdot\frac{1}{x^2}(x\geqslant 2)$.

又因为当 $x\geqslant 2$ 时，

$\frac{1}{x^2}<\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$，

则 $\frac{\ln x}{x^4}<\frac{1}{2\mathrm{e}}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}\right)(x\geqslant 2)$.

从而有 $\frac{\ln n}{n^4}<\frac{1}{2\mathrm{e}}\cdot\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$，

$\frac{\ln(n-1)}{(n-1)^4}<\frac{1}{2\mathrm{e}}\cdot\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)$，

$\frac{\ln 2}{2^4}<\frac{1}{2\mathrm{e}}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)$，

以上不等式累加可得 $\frac{\ln 2}{2^4}+\frac{\ln 3}{3^4}+\cdots+\frac{\ln n}{n^4}<\frac{1}{2\mathrm{e}}$，不等式得证.

结语

上述呈现了导数中数列不等式证明问题的三种求解思路，建立在“放缩”“化归”“由繁到简”“函数思想”的数学思想基础上，将复杂的数列不等式问题转化为简单、直观化的一般的单项比较或者间接比较的情形. 在教学中，需要结合实例，让学生在解题的过程中感受方法本身的内涵，从而提高学生的数学素养和解题能力.