例谈两类数列问题的解法

韩雅雅

数列是数学高考中重点考查的内容之一.数列问题侧重于考查同学们综合运用等差和等比数列的定义、通项公式、前n项和公式以及性质解题的能力.常见的数列问题有:(1)求数列的通项公式;(2)求数列的前n项和;(3)证明数列不等式.下面主要探讨一下两类数列问题的解法.

一、求数列的通项公式

对于简单的等差、等比数列的通项公式问题,通常可根据等差、等比数列的通项公式进行求解.而对于较为复杂的递推数列通项公式问题,往往需运用累加法、累乘法、构造法等来求解.一般地,若递推关系式形如$a_{n+1}=f(n)+a_n$,则采用累加法求解;若递推关系式形如$a_{n+1}=f(n)a_n$,则采用累乘法求解;若递推关系式形如$a_{n+1}=qa_n+p\cdot q^{n+1}$、$a_n-a_{n+1}=ka_{n+1}a_n(k\neq 0)$,则采用构造法求解.

例1.已知正项数列$\{a_n\}$中,$a_1=2$, $a_{n+1}=2a_n+3\times 5^n$,则数列$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$(　　).

A. $-3\times 2^{n-1}$　　B. $3\times 2^{n-1}$

C. $5^n+3\times 2^{n-1}$　　D. $5^n-3\times 2^{n-1}$

解法1.在$a_{n+1}=2a_n+3\times 5^n$的两边同时除以5^{n+1},得$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}}=\frac{2}{5}\times\frac{a_n}{5^n}+\frac{3}{5}$①,

令$b_n=\frac{a_n}{5^n}$,则①式可变为$b_{n+1}=\frac{2}{5}b_n+\frac{3}{5}$,

即$b_{n+1}-1=\frac{2}{5}(b_n-1)$,

所以数列$\{b_n-1\}$是等比数列,

其首项为$b_1-1=\frac{a_1}{5}-1=-\frac{3}{5}$,公比为$\frac{2}{5}$,

所以$b_n-1=-\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$,即$b_n=1-\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$,

所以$\frac{a_n}{5_n}=1-\frac{3}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}=1-\frac{3\times 2^{n-1}}{5^n}$,

所以$a_n=5^n-3\times 2^{n-1}$,故选D.

在已知递推关系式的左右两边同除以5^{n+1},可得$b_{n+1}-1=\frac{2}{5}(b_n-1)$,根据等比数列的定义,即可判定数列$\{b_n-1\}$为等比数列.利用等比数列的通项公式求得$b_n$,即可求出$a_n$.

解法2.设$a_{n+1}+k\times 5^{n+1}=2(a_n+k\times 5^n)$,

则$a_{n+1}=2a_n-3k\times 5^n$,

由$a_{n+1}=2a_n+3\times 5^n$可得$k=-1$,

所以$a_{n+1}-5^{n+1}=2(a_n-5^n)$,

所以数列$\{a_n-5^n\}$是首项为$a_1-5=-3$、公比为2的等比数列,

所以$a_n-5^n=-3\times 2^{n-1}$,

所以$a_n=5^n-3\times 2^{n-1}$,故选D.

引入待定系数k,将递推关系式设为$a_{n+1}+k\times 5^{n+1}=2(a_n+k\times 5^n)$,即可构造出等比数列$\{a_n-5^n\}$.求得$\{a_n-5^n\}$的首项和公比,即可根据等比数列的通项公式求得数列的通项公式.

一般地,对于形如$a_{n+1}=ka_n+p$(k,p为常数,$kp\neq 0$)的递推关系式,需将其设为$a_{n+1}+m=k(a_n+m)$,用待定系数法构造出等比数列$\{a_n+m\}$.对于形如$a_{n+1}=qa_n+p\cdot q^{n+1}$($n\in N^*$)的递推关系式,可在该式的两边同除以$q^{n+1}$,将它化成$\frac{a_{n+1}}{q^{n+1}}=\frac{a_n}{q^n}+p$,即可用待定系数法构造出数列等差数列$\left\{\frac{a_n}{q^n}\right\}$,利用等差数列的通项公式求数列$\{a_n\}$的通项公式.对于形如$a_n-a_{n+1}=ka_{n+1}a_n(k\neq 0)$的递推关系式,可在该式的两边同除以$a_{n+1}a_n$,将其变形为$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=k$的形式,从而构造出等差数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$.

二、分奇偶项求和问题

有些数列中的奇数项和偶数项呈现出不一样的规律,如奇数项为正数,偶数项为负数;奇数项为等差数列,偶数项为等比数列;奇数项为整数,偶数项为分数;等等.遇到这种情况,通常要分奇偶项进行求和,即根据奇数项、偶数项的规律,分两组:奇数项为一组、偶数项为一组,分别进行求和.

例2.已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,点(n,S_n)在曲线$x^2-2x+y=0$上.若$b_n=(-1)^n a_n$,数列$\{b_n\}$的前n项和为T_n,$mT_n-2\leqslant T_n$对一切正整数n恒成立,求实数m的值.

解:将点代(n,S_n)入曲线的方程$x^2-2x+y=0$中,

得：$S_n=2n-n^2, S_{n-1}=2(n-1)-(n-1)^2, n\geqslant 2$，

可得 $a_n=S_n-S_{n-1}=3-2n(n\geqslant 2)$，

又 $S_1=2\times 1-1^2=1=a_1$，满足上式，

所以 $a_n=3-2n(n\in \mathrm{N}^*)$，

则 $a_{n+1}-a_n=-2$，

故 $\{a_n\}$ 是以1为首项，-2 为公差的等差数列；

所以 $b_n=\begin{cases}3-2n, n为偶数,\\ 2n-3, n为奇数.\end{cases}$

若 $n=2k(k\in \mathrm{N}^*)$，

则 $T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{2k-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2k})$

$=\frac{[-1+2(2k-1)-3]k}{2}+\frac{(-1+3-2\times 2k)k}{2}$

$=2k^2-3k+(-2k^2+k)=-2k=-n$，

此时 $mT_n-2\leqslant T_n \Leftrightarrow m\geqslant \frac{T_n+2}{T_n}=1-\frac{2}{n}$，

易知 $f(n)=1-\frac{2}{n}$ 在 $n\in \mathrm{N}^*$ 时单调递增，

则 $f(n)<1$，即 $m\geqslant 1$；

若 $n=2k-1(k\in \mathrm{N}^*)$ 且 $n\neq 1$ 时，

则 $T_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{2k-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2k-2})$

$=\frac{[-1+2(2k-1)-3]k}{2}+\frac{[-1+3-2\times(2k-2)](k-1)}{2}$

$=2k^2-3k+[-2(k-1)^2+(k-1)]=2k-3=n-2$，

此时 $mT_n-2\leqslant T_n \Leftrightarrow m\leqslant \frac{T_n+2}{T_n}=1+\frac{2}{n-2}(n\geqslant 3)$，

易知 $f(n)=1+\frac{2}{n-2}(n\geqslant 3)$ 单调递减，

故 $1<f(n)\leqslant f(3)=3$，故 $m\leqslant 1$；

当 $n=1$ 时，$T_1=b_1=-1$，

则 $mT_n-2\leqslant T_n$，得 $-m-2\leqslant -1$，得 $m\geqslant -1$，

综上所述，对于 $\forall n\in \mathrm{N}^*$，$m=1$ 满足不等式.

对于这类分奇偶项求和的问题，一般需采用分组求和法求解，即分奇数项与偶数项分别进行求和.本题中 $b_n=\begin{cases}3-2n, n为偶数,\\ 2n-3, n为奇数,\end{cases}$ 当 n 为奇数、偶数时数列的通项公式有所不同，需分 $n=2k$，$n=2k-1(k\in \mathrm{N}^*)$ 且 $n\neq 1$ 和 $n=1$ 三种情况进行讨论，运用等差数列的前 n 项和公式进行求和.

不难发现，采用相应的手段，复杂的数列问题都可以转化为等差数列、等比数列问题，或简单的计算问题.这就要求我们在解题时，仔细研究数列各项的规律和递推关系式的结构特征，对其进行合理的变形、构造，以使问题得以转化，达到化难为易的目的.

（作者单位：甘肃省宁县第二中学）

（上接31页）

丰富读者的情感体验。

最后，采用第一人称，可以省去一些不必要的情节。由“我”来讲述故事，就可以避免横生枝节，选择性地呈现典型的场景，凸显作品的主题。作者从“我”的有限视角入手，两次写了“我”在黄新家的见闻，略去了不必要的情节，将初见黄新、再见黄新、黄新掩护“我”作为描述的重点。这种受限视角有助于读者将目光聚焦在故事中最具代表性的人物身上。

三、描写特殊的物象，增强情境的真实感

描写特殊的物象，往往能增强情境的真实感。在小说《党费》中，作者不仅描写了典型的环境，而且描写了特殊的物象，使小说中的画面更加真实。

首先，描写特殊的物象有利于增强读者的代入感。比如，在小说中，“我”第一次来到黄新的家时，看到“小窝棚里挤挤巴巴坐着三个人，有两个女的，一个老头，围着一大篮青菜，头也不抬地在摘菜叶子”。作者特意描写了“一大篮青菜”，增强了情境的真实感，让读者感受到生活气息。

其次，描写特殊的物象可以将人物的精神更好地呈现出来。作为党费，腌咸菜是小说《党费》中非常重要的一个物象，在小说中多次出现。“我”第一次到黄新家，黄新摸出一块咸萝卜给我吃，反映了当时生活的艰苦、物资的匮乏；“我”第二次到黄新家，看到“屋里地上摆着好几堆腌好的咸菜”，破坛子里有腌白菜、腌萝卜、腌蚕豆……，有黄的，有绿的。腌咸菜的种类不同，颜色也不同，说明这些腌咸菜来自不同同志的家，是群众准备的物资。作者借助这一物象展现了普通群众的革命斗争精神。“腌咸菜”这一物象贯穿了小说的始终，能使读者更好地感受到人物的精神品质。

综上所述，在小说《党费》中，作者通过描写典型的环境、采用第一人称、描写特殊的物象，增强了故事的真实感，使读者在阅读的过程中沉浸于其中，与故事中的人物产生情感上的共鸣。

（作者单位：江苏省泰兴中学）