

高中数学直线与圆锥曲线位置关系的解题方法

赵文文

(呼和浩特市第二中学, 内蒙古自治区 呼和浩特 010000)

摘 要:直线与圆锥曲线位置关系涉及到的问题较为抽象, 计算过程繁琐且复杂, 包含的知识点较多, 需要学生具备较强的应用能力, 思路要清晰, 才能正确解答, 从学生的角度来看难度较大. 本文在对人教版高中数学直线与圆锥曲线位置关系的学情、重难点、教学目标、方法等进行分析的基础上, 重点探讨具体的解题方法与思路, 仅供参考与借鉴.

关键词:高中数学; 直线与圆锥曲线位置关系; 解题方法

中图分类号:G632

文献标识码:A

文章编号:1008-0333(2023)09-0029-03

圆锥曲线位置关系作为高中数学教学中的重要知识点, 是高考必考知识点之一. 但是因为涉及到的内容较多, 而且多为抽象图形, 学生很难较好地理解与掌握. 本文重点针对高中数学直线与圆锥曲线位置关系的解题方法进行了分析, 旨在为学生良好解题思路的培养, 帮助其掌握此类型题目的解题方法提供有价值的参考与借鉴.

1 学情分析

学生已经掌握了直线的基本知识点、圆锥曲线定义、标准方程、简单几何性质, 这都在很大程度上为本节课的讲解打下了基础. 由于学生逻辑思维已有较好的基础, 学习目标较为明确, 基于建构主义理论, 采用启发式教学法, 师生间进行探讨、总结与归纳. 站在学生认知视角下, 充分考虑到学生的认知规律, 坚持循序渐进的启发式教学原则, 强化复习与训练, 帮助学生克服对解析几何的恐惧心理, 鼓励学生做一些常见题目, 熟悉一般解答模型, 引导学生掌握解题思路, 使学生能够解决的问题的难度逐步提高, 解题更灵活, 综合性更强. 由于本节课的运算量相对较大, 解题中主要采用思路点拨、思维发散、分类探

讨的方法.

2 教学重难点

重点:理解用方程思想解决直线与圆锥曲线的位置关系的方法; 感悟方程组的解的个数等于直线与圆锥曲线公共点的个数. 充分运用新旧知识迁移, 从数与形两个层面对相关结论进行深层次理解, 形成系统化的知识体系; 掌握共性(方程法)的基础上, 注意个性(距离法), 避免负迁移, 能够做到学以致用, 举一反三, 特殊问题特殊对待.

难点:采用代数方法(对方程组解的探讨)研究直线与圆锥曲线的公共点问题, 判断直线与圆锥曲线的位置关系, 学会应用弦长公式、直线与圆锥曲线位置关系的判断方法, 重视数形结合思想的有效渗透.

3 教学目标

知识目标:直线与圆锥曲线位置关系的判定方法, 其中包括几何法(数形结合)与代数法; 掌握弦的概念、弦长公式以及弦中点的问题.

能力目标:结合直线与圆锥曲线位置关系的判断方法, 感受如何使用代数方法将几何问题进行有

收稿日期:2022-12-25

作者简介:赵文文(1983.4-), 女, 内蒙古呼和浩特人, 研究生, 中学一级教师, 从事应用数学研究.

效处理的思想,能够使用数形结合法处理直线与圆锥曲线相关问题.同时在解题时体会数形结合、转化、类比、归纳等数学思想,提升发现、分析以及解决问题的能力.

情感目标:激发学生探索数学的兴趣,使学生在亲身体验中获取知识,体验乐趣,通过数形统一与对立的分析,强化辩证思维的培养.

4 解题方法

4.1 点差法

点差法运用的解题思想为设而不求、整体换代,特别是在直线与圆锥曲线位置关系类型题目的解答中,思路的呈现较为清晰,而且易于被学生接受,主要解决的是垂直平分线、弦中点轨迹、中点弦等问题,学生能够将点差法不等价性特点体现出来,在具体应用时,可对判别式 $\Delta > 0$ 是不是成立给予充分考虑.

例1 如果抛物线 $y = ax^2 - 1 (a \neq 0)$ 中存在和直线 $x + y = 0$ 对称相异的两点,求 a 的取值范围.

解 将两个相异对称点分别设为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $M(x_0, y_0)$ 是线段 AB 中点,结合抛物线 $y = ax^2 - 1 (a \neq 0)$, 可得 $y_1 = ax_1^2 - 1$, $y_2 = ax_2^2 - 1$, 那么, $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)(x_1 + x_2)$. $\therefore \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2)$, 所以 $k_{AB} = 2ax_0$. 由直线 $x + y = 0$ 与直线 AB 是互相垂直的关系, 可得 $2ax_0 = 1$, $\therefore x_0 = \frac{1}{2a}$. 又 $\therefore M(x_0, y_0)$ 在直线 $x + y = 0$ 上, $\therefore y_0 = -\frac{1}{2a}$. 所以, 点 M 的坐标为 $(\frac{1}{2a}, -\frac{1}{2a})$. 由于 M 点处于抛物线 $y = ax^2 - 1 (a \neq 0)$ 内, 原点可看作是参考点, 结合图形 (如图1), 进而获得, 当 $a > 0$ 时, $y_0 > ax_0^2 - 1$, 代入到公式以后进而得出 $a > \frac{3}{4}$; 当 $a < 0$ 时, 且 $y_0 < ax_0^2 - 1$, 代入公式以后得出 $a \in \phi$. 综上, a 的取值范围为 $(\frac{3}{4}, +\infty)$.

采用点差法解决此类型的选择题是有效的, 不仅能够在很大程度上节省计算时间, 而且更加快捷,

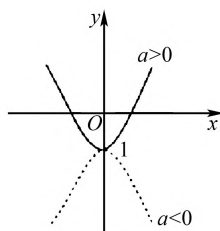


图1 例1题图

准确率非常高.

4.2 数形结合思想

数形结合思想能够直观呈现数学问题, 化难为简, 通过形象思维使复杂问题迎刃而解, 引导学生寻找规律与特点, 进而更好地分析、解决问题.

例2 已知曲线 $C: y = \frac{\sqrt{20-x^2}}{2}$ 和直线 $l: y = -x + m$ 只有一个公共点, 求实数 m 的取值范围.

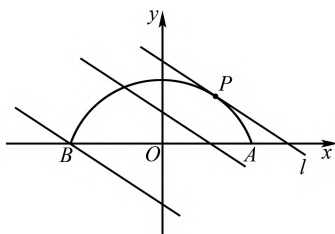


图2 例2题图

解 如图2, 当直线 l 和曲线相切于点 P 的时候, 仅有一个公共点, 进而得出 $m = 5$, 除此之外如果将直线 l 从点 P 平移至经过点 A 的过程中, 与题意都不相符, 从而得知 $-2\sqrt{5} \leq m < 2\sqrt{5}$, 所以 $m = 5$ 或者 $-2\sqrt{5} \leq m < 2\sqrt{5}$.

对此类型题目进行解答的过程中, 如果需要将方程变形, 那么要关注到范围的变化, 只有这样才能降低出错率. 运用数形结合思想解决此问题, 解题思路直观且清晰, 更易于学生接受.

4.3 方程与函数思想

最近几年高考命题中, 对学生数学思想方法的考查高度重视, 方程与函数思想是基本数学思想方法之一, 目的是通过知识间的相互关联性引导学生解决数学问题.

例3 在 $Rt \triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $A(-\sqrt{2}, 1)$, $B(\sqrt{2}, 1)$, $S_{\triangle ABC} = \sqrt{2}$, 曲线 $E(y \geq 1)$ 上动点 P 处于运动状态, 如果曲线 E 过点 C , 并且满足 $|PA| +$

$|PB|$ 的值是常数.

(1)求曲线 E 的方程;

(2)当直线 l 的斜率是 1 时,如果直线 l 和曲线 E 存在两个不同交点 P, Q ,求线段 PQ 中点 M 的轨迹方程.

解 (1) $\because |AB| = 2\sqrt{2}, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |AB| = \sqrt{2},$

$\therefore |AC| = 1$, 又 $|BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2$, 进而得出 $|BC| = 3$.

$\therefore |PA| + |PB| = |AC| + |BC| = 4 > 2\sqrt{2}$

$\therefore$ 点 P 在以 A, B 两点为焦点,长半轴长是 $a = 2$,半焦距长是 $c = \sqrt{2}$,短半轴长是 $b = \sqrt{2}$ 的椭圆 $E(y \geq 1)$ 上.

$\therefore$ 曲线 E 方程是 $\frac{x^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1 (y \geq 1)$.

(2)设直线 $l: y = x + m$,代入 E 的方程中,消 x 可得: $3y^2 - 2(m+2)y + m^2 - 2 = 0$. 令 $f(y) = 3y^2 - 2(m+2)y + m^2 - 2$,如果方程 $f(y) = 0$ 存在两个大于等于 1 且不相等的实根,则可得出:

$$\begin{cases} \Delta = 4(m+2)^2 - 12(m^2 - 2) > 0 \\ f(1) = m^2 - 2m - 3 \geq 0 \\ \frac{m+2}{3} > 1 \end{cases}$$

进而得出 $3 \leq m < 1 + \sqrt{6}$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2), PQ$ 中点是 $M(x, y)$.

则 $y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{m+2}{3}$, 因此 $\frac{5}{3} \leq y < 1 + \frac{\sqrt{6}}{3}$, 将 $m =$

$3y - 2$ 代入到 $y = x + m$ 中,可得 $y = -\frac{1}{2}x + 1$,最终得

出 M 点的轨迹方程为: $y = -\frac{1}{2}x + 1 (\frac{5}{3} \leq y < 1 + \frac{\sqrt{6}}{3})$.

通过分析以上例题,进而启发学生思维,得出直线与圆锥曲线公共点问题相关结论:

设直线 $l: y = kx + m$, 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 抛物线 $C_3: y^2 = 2px (p > 0)$

如果将直线方程分别代入到以上三个曲线方

程,进行整理以后得出以下公式:

$$(b^2 + a^2k^2)x^2 + 2a^2kmx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0 \quad (1)$$

$$(b^2 - a^2k^2)x^2 - 2a^2kmx - a^2m^2 - a^2b^2 = 0 \quad (2)$$

$$k^2x^2 + 2(km - p)x + m^2 = 0 \quad (3)$$

根据(1)式:因为 $b^2 + a^2k^2 \neq 0$,所以只需要对由判别式获得的交点情况进行探讨;根据(2)式:

当 $b^2 - a^2k^2 = 0$ 时,也就是 $k = \pm \frac{b}{a}$ (直线 l 和其渐

近线平行)时,对 $-2a^2km$ 是不是等于 0 进行判断,进而得出结论:直线与曲线存在一个交点或者没有交点. 如果 $b^2 - a^2k^2 \neq 0$,只要对判别式获得的交点情况进行探讨即可. 根据(3)式:在对 k^2 情况进行探讨的时候,如果 $k^2 = 0$,直线平行于抛物线的对称轴,所以仅存在一个交点. 如果 $k^2 \neq 0$,那么此时只需要对判别式获得的交点情况进行探讨. 若直线斜率不存在的时候,可以得出直线方程是 $x = n$,通过分别探讨的形式,可以获得最终的答案.

直线与圆锥曲线的位置关系在解析几何数学教学中是重中之重,同时也是考试难点,学生在此类型的题目解答中极易失分,所以掌握解题方法便成为了关键所在. 而本文基于教材、学生学情、教学重难点、教学目标,从点差法、数形结合思想以及方程与函数思想三个层面分析了具体的解题方法,以便于学生能够对解题技巧充分掌握,深刻了解各个知识点间存在的内在关联性,从而可以做到熟练运用不同的解题方法,对数学知识有一个深层次的认知.

参考文献:

- [1] 张方磊. 高中数学直线与圆锥曲线位置关系解法探讨[J]. 年轻人, 2020(43): 135.
- [2] 黄如炎. 走出直线与圆锥曲线位置关系的教学困境[J]. 中学教学研究, 2018(5): 1-3.
- [3] 张师可. 一线定乾坤——直线与圆锥曲线位置关系问题的解答[J]. 高中数理化, 2018(13): 31-32.
- [4] 蔡海涛. 几类直线与圆锥曲线位置关系问题[J]. 高中数学教与学, 2019(8): 38-41.

[责任编辑:李璟]