如何提高高三数学课堂的高效性

——以一节“直线与圆锥曲线的位置关系”复习课为例

钱瑶强

（吴江平望中学，江苏 苏州 215221）

摘 要：直线与圆锥曲线的位置关系是高中数学的重要内容，也是高考数学试题的热点之一，对此内容如何进行复习、整合？从而打造高效课堂，这是每个高三老师一直思考的问题。下面以一节高三复习课“直线与圆锥曲线的位置关系”为例，谈谈我的想法。

关键词：直线方程；位置关系；圆锥曲线；符号运算

直线与圆锥曲线的位置关系是高中数学的重要内容，也是高考数学试题的热点之一，对此内容如何进行复习、整合从而打造高效课堂，这是每个高三老师一直思考的问题。下面以一节高三复习课“直线与圆锥曲线的位置关系”为例，谈谈我的想法。

引入

教师：圆锥曲线与直线的位置关系有哪几种类型呢？

学生：有相交、相切、相离。

教师：那么如何评判直线与圆锥曲线的位置关系呢？

学生：直线方程与圆锥曲线方程联立，根据所得方程组根的个数进行判断。

教师：从几何图形分析，可以从直线与圆锥曲线的交点个数得到直线与圆锥曲线的位置关系；从代数角度分析，可以从直线与圆锥曲线联立所得方程组根的个数判断直线与圆锥曲线的位置关系。

探究：直线与圆锥曲线的位置关系的判定。

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左右顶点分别为 A_1、A_2，过点 $P(m,n)$ 的直线 l。

【问题1】当 $m=1$，$n=1$ 时，判定直线 l 与椭圆 C 的位置关系。

（学生板演）

学生1：由 $\begin{cases}y-1=k(x-1)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow(2k^2+1)x^2+4k(1-k)x+2(1-k)^2-4=0$

判别式 $\Delta=8(3k^2+2k+1)=8\left[3\left(k+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right]>0$，所以直线 l 与椭圆 C 相交。

学生2：$\because\frac{1^2}{4}+\frac{1^2}{2}<1$，$\therefore$ 点 $P(1,1)$ 在椭圆内，所以直线 l 与椭圆 C 相交。

学生3：同学1的解题过程缺少讨论过点 P 垂直于 x 轴的直线 $x=1$ 与椭圆位置关系，应补上。也可以通过设直线 l 方程为 $x-1=t(y-1)$ 进行判定。

【问题2】当 $n=1$ 时，直线 l 与椭圆 C 相交，求实数 m 的取值范围。

学生4：设直线 l 方程为 $x-m=t(y-1)$，由 $\begin{cases}x-m=t(y-1)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow(t^2+2)y^2+2t(m-t)y+(m-t)^2-4=0$，$\Delta_1=8[t^2+2mt+4-m^2]>0$，则对 $\forall t\in\mathbf{R}$，恒有 $t^2+2mt+4-m^2>0$ 成立，故有 $\Delta_2=4m^2-4(4-m^2)<0$ 解得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$。

学生5：仿同学2的做法，当且仅当点 $P(m,1)$ 在椭圆内时，直线 l 与椭圆 C 才恒相交。所以由 $\frac{m^2}{4}+\frac{1^2}{2}<1$ 解得 $-\sqrt{2}<m<\sqrt{2}$。或者通过作直线 $y=1$，与椭圆交于点 $M(-\sqrt{2},1)$，$N(\sqrt{2},1)$，当点 $P(m,1)$ 在点 M 和点 N 之间时，直线 l 与椭圆 C 才恒相交。

【问题3】当 $m=1$，$n=1$ 时，是否存在直线 l，使 l 与椭圆交于 A，B 点，且 P 为弦 AB 的中点？若存在，求出 l 的方程。

学生6：首先检验直线 $x=1$ 是否符合题意，显然不符合。由同学1的解法知 $(2k^2+1)x^2+4k(1-k)x+2(1-$

$k)^2-4=0$，$\therefore x_1+x_2=\frac{-4k(1-k)}{2k^2+1}=2x_P=2$，解得 $k=-\frac{1}{2}$。

所以直线 l 的方程为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$ 即 $x+2y-3=0$。

学生 7：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则由 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1\\ \frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{2(y_1+y_2)}$。$\because P$ 为 AB 中点，$\therefore x_1+x_2=2$，$y_1+y_2=2$，代入求得 $k_{AB}=-\frac{1}{2}$，所以直线 l 的方程为 $x+2y-3=0$。

学生 8：同学 6、7 都忘记验证直线与椭圆相交，需补充。

【问题 4】当 $m=1$，$n=0$ 时，直线 l 与椭圆交于 A，B 点，且 $|AB|=\frac{4}{3}\sqrt{5}$，求直线 l 的方程。

学生 9：先验证直线 l 的特殊位置 $x=1$ 时，由 $\begin{cases}x=1\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow A\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，$B\left(1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，此时 $|AB|=\sqrt{6}$ 不满足题意。设直线 l 的方程为 $y=k(x-1)$，由 $\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}\Rightarrow(2k^2+1)x^2-4k^2x+(2k^2-4)=0$，$\Delta=4(6k^2+4)$，$|x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{6k^2+4}}{2k^2+1}$，$\therefore|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{4}{3}\sqrt{5}$，解得 $k=\pm1$。所以直线 l 的方程为 $y=\pm(x-1)$。

教师：同学们答的很好。回顾同学们的解答思路和过程，我们可以总结出以下结论：

(1)从代数的性质来分析，判断直线与圆锥曲线的位置关系的解题思路和方式。

位置关系问题 $\Leftrightarrow\begin{cases}Ax+By+C=0\\ f(x,y)=0\end{cases}$ 解的问题 $\Leftrightarrow ax^2+bx+c=0$（或 $my^2+ny+p=0$）

(2)在研究直线与圆锥曲线相交的过程中，经常使用“设而不求”的方法。设交点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

当曲线为椭圆时，$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}$，①

当曲线为双曲线时，$\begin{cases}\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1\\ \frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1\end{cases}\Rightarrow\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}$，②

当曲线为抛物线时，$\begin{cases}y_1^2=2px_1\\ y_2^2=2px_2\end{cases}\Rightarrow\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{2p}{y_1+y_2}$，③

比较式①、②、③可知等式左端的几何意义是直线 AB 的斜率，右端和弦 AB 中点坐标有联系，设弦 AB 中点坐标为 (x_0,y_0)，则 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，因此此方法只能解决与弦所在直线的斜率、弦中点有关的问题。另外，对于二次方程来说，无论判别式 Δ 正负，韦达定理都成立，所以在使用该方法时，注意检验。

(3)当直线与圆锥曲线相交时 $\begin{cases}Ax+By+C=0\\ f(x,y)=0\end{cases}\Rightarrow ax^2+bx+c=0$（或 $my^2+ny+p=0$）

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$，$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{|a|}$。

点评：江苏省高考考试说明对本节的要求是：能解决直线与圆锥曲线的位置关系的判定，从过定点（或动点）的直线与椭圆的位置关系为背景，有效地探究了直线与圆锥曲线的公共点的有无、多少及弦中点、弦长计算问题，并归纳其解决方法。灵活运用点在曲线上这一最基本的条件进行推理，真正达到“设而不求”和减少运算量的目的。符号运算是学生的弱项，这样的训练，进一步加强了学生的抽象思维能力。通过对特殊位置的探究，类比推广到一般情形，达到举一反三，触类旁通。从课堂气氛看，学生探究的热情是高涨的，效果是良好的。

新课改下对教师提出了更高的要求，其职责在“激发学生们的学习积极性，并提供充分从事数学活动的机会，帮助他们在自主探索和合作交流中真正理解和掌握基本的数学知识与技能，以此获得广泛的数学活动经验。”作为一线老师，我们确实感受到一些新思维、新变化、新收获。如何改变传统的教学思路以适应素质教育的发展是摆在我们面前的重要课题，如果我们每节课的知识点都能让学生多一些探究，那么学生学习数学的积极性就会更高，能力会更强，这样的课堂才是高效的课堂。

参考文献：

[1]俞国军.高考题打造为探究型问题的策略——以一节“直线与圆锥曲线的位置关系”的复习课为例.中学数学研究，2011，(03).