数列递推公式在求通项公式中的应用

■秦皇岛市第一中学　王　珊

递推公式是表示数列的一种方法，它揭示了相邻项之间的关系，而项与项数之间的关系比较隐蔽，因此蒙上了一层神秘的面纱，给同学们的学习带来一定的困难。将隐形的递推关系转换为显性的递推关系式是求解数列通项公式的关键。在解决实际的数列问题时，需要同学们掌握等差与等比数列的定义及辨别方式等基础性知识，灵活运用归纳法、累加法、累乘法、待定系数法等方法，进而提升大家的逻辑思维能力。

一、归纳法

根据递推公式计算出数列的某些项，观察其特征，找出相应的规律，归纳出一般性的结论并加以证明，进而解决问题。

例 1　在数列$\{a_n\}$中，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，则$a_{2\,024}=$_____。

解析：$a_2=1-\frac{1}{a_1}=1-2=-1$，$a_3=1-\frac{1}{a_2}=1+1=2$，$a_4=1-\frac{1}{a_3}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$。

数列$\{a_n\}$是以 3 为周期的周期数列，故$a_{2\,024}=a_{2+674\times 3}=a_2=-1$。

点评：此类题型，一般可以通过解出前几项，发现其规律，或者确定数列的周期，从而确定数列的通项公式。

二、累加法

形如$a_{n+1}=a_n+f(n)$，可转化为$a_{n+1}-a_n=f(n)$，进而求出$(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1$，即得数列$\{a_n\}$的通项公式。

例 2　已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+2\times 3^n+1$，$a_1=3$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解析：由$a_{n+1}=a_n+2\times 3^n+1$，得$a_{n+1}-a_n=2\times 3^n+1$。

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1$

$=(2\times 3^{n-1}+1)+(2\times 3^{n-2}+1)+\cdots+(2\times 3^2+1)+(2\times 3^1+1)+3$

$=2\times(3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+3^2+3^1)+(n-1)+3$

$=2\times\frac{3(1-3^{n-1})}{1-3}+(n-1)+3$

$=3^n-3+n-1+3$

$=3^n+n-1$。

所以$a_n=3^n+n-1$。

点评：累加法是通过相加抵消中间项，然后整理求通项。解本题的关键是把递推关系式$a_{n+1}=a_n+2\times 3^n+1$转化为$a_{n+1}-a_n=2\times 3^n+1$，进而求出$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1$，最后求得数列$\{a_n\}$的通项公式。

三、累乘法

把递推关系式$a_{n+1}=f(n)a_n(n\geqslant 2)$转化为$\frac{a_{n+1}}{a_n}=n+1(n\geqslant 2)$，进而求出$\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot a_2$，从而可得当$n\geqslant 2$时，$a_n$的表达式，最后求出数列$\{a_n\}$的通项公式。

例 3　（2022 年新高考Ⅰ卷第 17 题）记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1$，$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解析：已知$a_1=1$，则$S_1=a_1=1$，$\frac{S_1}{a_1}=1$。

又因为$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，所以$\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，$S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$。

当$n\geqslant 2$时，$S_{n-1}=\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$。

因此，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$。

整理得$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}$，即$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$。

故$a_n=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=1\times\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\cdots\times\frac{n}{n-2}\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}$。

显然此式对于$n=1$也成立。

故$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$。

点评：累乘法是通过相乘抵消中间项，同时另一侧在相乘的过程中能够约分化简。利用等差数列的通项公式求得$\frac{S_n}{a_n}=1+\frac{1}{3}(n-1)=\frac{n+2}{3}$，得到$S_n=\frac{(n+2)a_n}{3}$。利用和与项的关系得到当$n\geqslant 2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{(n+2)a_n}{3}-\frac{(n+1)a_{n-1}}{3}$，进而得到$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$，利用累乘法求得$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，检验当$n=1$时也成立，得到$\{a_n\}$的通项公式$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$。

四、待定系数法

由$a_{n+1}=pa_n+q$（p，q为常数且$p\neq 1$，$q\neq 0$）和a_1确定数列$\{a_n\}$的通项，这种数列是直接引申等差数列或等比数列得到的数列，如何求这种数列的通项呢？摆在我们面前的有两条路：其一是将其转化为等差数列，其二是将其转化为等比数列。下面结合本题条件来解答。

例4 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=2a_n+3\cdot 5^n$，$a_1=6$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解析：由题意设：

$a_{n+1}+x\cdot 5^{n+1}=2(a_n+x\cdot 5^n)$。①

将$a_{n+1}=2a_n+3\cdot 5^n$代入①式，得$2a_n+3\cdot 5^n+x\cdot 5^{n+1}=2a_n+2x\cdot 5^n$，等式两边消去$2a_n$，得$3\cdot 5^n+x\cdot 5^{n+1}=2x\cdot 5^n$。

两边除以5^n，得$3+5x=2x$，$x=-1$。代入①式得$a_{n+1}-5^{n+1}=2(a_n-5^n)$。②

由$a_1-5^1=6-5=1\neq 0$及②式得$a_n-5^n\neq 0$，则$\frac{a_{n+1}-5^{n+1}}{a_n-5^n}=2$。故数列$\{a_n-5^n\}$是以$a_1-5^1=1$为首项，2为公比的等比数列，$a_n-5^n=2^{n-1}$，即$a_n=2^{n-1}+5^n$。

点评：解本题的关键是把递推关系式$a_{n+1}=2a_n+3\cdot 5^n$转化为$a_{n+1}-5^{n+1}=2(a_n-5^n)$，从而可知数列$\{a_n-5^n\}$是等比数列，进而求出数列$\{a_n-5^n\}$的通项公式，最后求出数列$\{a_n\}$的通项公式。

纵观以上类型，发现递推关系问题的考查形式灵活多样，同时隐含着丰富的数学思想。从表面上看种类繁杂，实则都在向等差、等比数列等熟悉的知识转化，只要抓住数列通项的核心——结构一致，选择适当的方法，注重用函数与方程、转化与化归等数学思想方法指导解题实践，就能把提升数学素养真正落到实处。

练一练：已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n+2n+1$，$a_1=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式。

解析：由$a_{n+1}=a_n+2n+1$，得$a_{n+1}-a_n=2n+1$。

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1$

$=[2(n-1)+1]+[2(n-2)+1]+\cdots+(2\times 2+1)+(2\times 1+1)+1$

$=2[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]+(n-1)+1$

$=2\times\frac{(n-1)n}{2}+(n-1)+1$

$=(n-1)(n+1)+1$

$=n^2$。

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2$。

（责任编辑 徐利杰）