基于深度学习的“直线与圆锥曲线位置关系”复习课微设计

◉山东省临清市第一中学　姚继新

摘要:直线与圆锥曲线的位置关系问题历来是高考的一个热点内容,更是一个难点内容.高三复习中,教师要善于“借题发挥”,充分挖掘试题潜在价值.秉承深度学习理念,既要“学透”知识,还要“学活”知识,更要在“关注知识、关注能力培养”基础上深入“参悟”知识,以达到对文本内容新的思考和体悟.

关键词:深度学习;微设计;核心素养

1 引言

直线与圆锥曲线的位置关系问题历来是高考的一个热点内容,更是一个难点内容.为了提高高三复习课的效率,笔者选择2021年4月份山东大联考试卷中的第21题作为这节课的“主打题”.该题是一道典型的直线与圆锥曲线的位置关系问题,特征明显,思路多样,于是笔者便“借题发挥”,在课堂上与学生就此展开了讨论.

2 教学过程微设计片段

例题　在平面直角坐标系 xOy 中,动点 M 到直线 $x=3$ 的距离是到点 $(2,0)$ 的距离的 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ 倍.

(1)求动点 M 的轨迹 E 的方程;

(2)点 P 为直线 $x=3$ 上一动点,过 P 点作曲线 E 的切线,切点为 Q,线段 PQ 的中点为 N,问是否存在定点 T,满足 $|PQ|=2|NT|$?若存在,求出定点 T 的坐标;若不存在,请说明理由.

感想1:本题是这次联考试卷的倒数第二题,按惯常的思维考虑,应属于“难解”的大题范畴,甚至被有些考生“战略性放弃”的题目.但就如高考的“解析几何解答题”一样,近几年呈现出“难度下降”的特点,不再那么高不可攀,考生“攻克此题”亦从不可能变为可能.

感想2:本题从出题的角度及形式看,属于常规套路.第一问是常见的“求轨迹方程”,属于“白送分”.第二问要求考生就定点 T 的存在性进行探索,这种设计相较很多题目让考生直接“求定点 T 的坐标”的设计增加了迷惑性,对考生有明显的思维上的干扰(毕竟考生还并不是非常确定“定点 T”就一定存在),考查学生的数学探究能力,符合当前考查学生学科核心素养的命题导向.

感想3:本题很明显脱胎于2020年高考山东卷的第22题,无论是从命题的角度,还是解题的思路,两者如出一辙,只是2020年高考山东卷的第22题“隐藏”得更深一些,需要考生首先解决直线 MN 是过定点的,然后再去寻找定点 Q,而本题则相对更“直白”些,只需要考生将“$|PQ|=2|NT|$”等价转化为“$\angle PTQ=\frac{\pi}{2}$”,即“$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=0$”就可以了,于是思路理顺了,解题的方法也就出来了.

生1:根据直线与椭圆的位置关系常用方法,联立方程组,根据相切关系可以设点依次求解.

(1)轨迹 E:$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.(过程略)

(2)由题意可知直线 PQ 的斜率一定存在,设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m(m\neq0)$,$Q(x_0,y_0)$.

由 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 消去 y,得 $(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-6=0$.因为 PQ 为椭圆 E 的切线,所以

$$\Delta=36k^2m^2-12(1+3k^2)(m^2-2)=0,$$

化简得
$$m^2=2(3k^2+1).$$

又 $x_1+x_2=-\frac{6km}{1+3k^2}$,则

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{3km}{1+3k^2}=-\frac{6k}{m},$$

$$y_0=kx_0+m=\frac{m}{1+3k^2}=\frac{2}{m}.$$

所以切点 $Q\left(-\frac{6k}{m},\frac{2}{m}\right)$,且 $P(3,3k+m)$.

注意到曲线的对称性,所以定点 T 若存在,则其必在 x 轴上,不妨设 $T(t,0)$,则 $\overrightarrow{TQ}=\left(-\frac{6k}{m}-t,\frac{2}{m}\right)$,

$\overrightarrow{TP}=(3-t,3k+m)$.由$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=0$,得$\left(\frac{6k}{m}+t\right)(3-t)-\frac{2}{m}(3k+m)=0$,化简得$6(t-2)\frac{k}{m}+(t-2)(t-1)=0$.当$t=2$时,此时对任意的$m,k$都恒成立,即存在定点$T(2,0)$满足$|PQ|=2|NT|$.

师:生1的解法非常好,是一个非常典型的解法,也可以算作是通性通法了.该方法的好处在于思路清晰,逻辑严密,便于方法的展开,但缺点也很明显,就是运算量偏大,过程稍显"繁琐".大家再想一想,能否让过程变得更简捷?

生2:如果我们聚焦于"PQ是椭圆的切线"这个条件,则可以简化第二问的解题过程.

(2)由对称性可知,定点T若存在,则其必在x轴上,不妨设$T(t,0)$.由题意可知,T在以PQ为直径的圆上,则$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=0$.

设$Q(x_0,y_0)$,则过$Q(x_0,y_0)$的椭圆E的切线方程为$\frac{x_0x}{6}+\frac{y_0y}{2}=1$.

由$x=3$,得$P\left(3,\frac{2-x_0}{y_0}\right)$,故$\overrightarrow{TQ}=(x_0-t,y_0)$,$\overrightarrow{TP}=\left(3-t,\frac{2-x_0}{y_0}\right)$.

由$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=0$,得$(x_0-t)(3-t)+(2-x_0)=0$,整理得$(2-t)x_0+(t-1)(t-2)=0$.当$t=2$时,此时对任意的$x_0$恒成立,即存在定点$T(2,0)$满足$|PQ|=2|NT|$.

这时候,老师发现生3非常着急的样子,显然有话要说,于是示意生3也说一说.

生3:老师先前讲过"特殊化"的思想,在这里,如果我们先从特殊情况入手获得定点T,再证明该点对一般情况也适合,是不是也可以得解.

师:从特殊到一般来研究问题,快速找到突破点,这是很好的想法,大家不妨试一下.

数分钟后:

生3:注意到椭圆E的半短轴长为$\sqrt{2}$,我们尝试取两个特殊点,分别为$P_1(3,\sqrt{2})$和$P_2(3,-\sqrt{2})$,其对应的圆的圆心分别是$\left(\frac{3}{2},\sqrt{2}\right)$和$\left(\frac{3}{2},-\sqrt{2}\right)$,而半径均是$\frac{3}{2}$,联立方程组$\begin{cases}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-\sqrt{2})^2=\frac{9}{4},\\ \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+\sqrt{2})^2=\frac{9}{4}.\end{cases}$

令$y=0$,可得$x=1$,或$x=2$.下面再检验一下一般情况.

(1)若$T(1,0)$,此时,设直线PQ的方程为$y=kx+m(m\neq0)$,……,得$\overrightarrow{TP}\cdot\overrightarrow{TQ}=\frac{-3km}{1+3k^2}$,不恒为0,故舍去.

(2)若$T(2,0)$,此时……符合题意.

综上所述,存在定点$T(2,0)$满足$|PQ|=2|NT|$.

以上是笔者微设计的全部内容,但一路走下来,心里怪怪的,总有差那么一点的感觉,就在这时,生4同学举手示意,"老师,我还有一种想法".

生4:老师,我发现利用椭圆的切点弦方程,本题还可以这样解.

引理:过椭圆外一点$P(x_0,y_0)$向椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$(a>b>0)$作切线,切点分别为$A,B$,则切点弦$AB$所在的直线方程为$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$.(引理证明略)

利用这个引理,很明显,本题中过椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$外一点$P(3,t)$向椭圆作切线,则切点弦$QM$所在的直线方程为$\frac{3x}{6}+\frac{ty}{2}=1$.而若定点$T$存在,则其必在切点弦$QM$上,即$T(x,y)$必满足方程$\frac{3x}{6}+\frac{ty}{2}=1$,当$y=0$时,必有$x=2$,即存在定点$T(2,0)$满足$|PQ|=2|NT|$.

师生不由得鼓起掌来,听到教室里面掌声响起来,刚才那种"怪怪的感觉"也烟消云散了.

3 结束语

美国数学家波利亚在《怎样解题》中说过,解题的价值不是答案的本身,而在于弄清"是怎样想到这个解法的?'、"是什么促使你这样想,这样做的?'这就是深度学习的基本特征之一:要"学透"知识,不仅知其然也要知其所以然,还要知其可能然.深度学习的另一个基本特征就是要"学活"知识,要做到活学活用,举一反三,并能够依据不同情境创造性的迁移和应用知识,灵活解决同一类型的不同问题.以上两个特征体现了深度学习"要关注知识、关注能力培养",而深度学习的第三个基本特征则是要"参悟"知识,深度学习不止于文本,而是基于文本内容的新的生长和超越,这种生长和超越,既可以是对文本内容本身的拓展和深化,也可以是对文本内容新的思考和体悟,这第三个基本特征则是要"见人"了,在"参悟知识"过程中提升核心素养、实现"立德树人"的成长,这就是"解题教学"弥足珍贵的价值.