

注重思路点拨,揭露知识本质,提升核心素养 ——以“数列放缩”的教学为例

刘江燕 江苏省海门中学 226100

[摘要] 发展学生的数学学科核心素养离不开追根溯源、探寻知识本质等环节,更离不开教师的指导.文章以“数列放缩”的教学为例,具体谈谈课堂中教师该怎样进行思路点拨,揭露知识本质,提升学生的数学学科核心素养.

[关键词] 思路点拨;知识本质;核心素养

新课标引领下的数学课堂教学以发展学生的数学学科核心素养为总目标,且须遵循“以生为本”的教学原理,但学生的认知是有限的,想要学生在课堂中获得学习效益的最大化,自然离不开教师的思路引导.本文以“数列放缩”的教学为例,具体谈谈课堂中教师如何通过思路点拨来揭露知识本质,并在这一过程中提升学生的数学学科核心素养.

教学实录

师:本节课探究的主题是“数列放缩”问题,请大家观察以下几个通项不规则的数列,分析它们分别具有怎样的结构特征.

用PPT展示:① $a_1+a_2+\cdots+a_n < f(n)$;② $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n < f(n)$;③ $a_1+a_2+\cdots+a_n < k$ (k 为常数).

为了避免学生机械式模仿,笔者设计了以下教学活动,以期让学生进一步理解知识本质.

1. 第一种形式的探索

板演:类似 $a_1+a_2+\cdots+a_n < f(n)$ 的形式,可记 $S_n=f(n)$,当 $n \geq 2$ 时,记 $c_n=S_n-S_{n-1}=f(n)-f(n-1)$.

师:至此,大家思考一下,只要证明什么就可以了呢?

师生、生生经过互动与交流,探究如下结论:仅需证明 $a_n < c_n$,再进行累加就能顺利完成证明.

为了夯实这一类数列证明的基础,让学生获得举一反三的能力,此处笔者提供了一个实例与学生一起研究,并以问题串的方式进行思路点拨,让学生沿着明确的方向进行思考,以提高学习效率.

例1 若 $n \in \mathbf{N}^*$,证明: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-1)$.

思路点拨 ①该不等式的左边是多少项的和?②能不能应用我们所知道的公式对该不等式的左边进行求和?③结合第一种形式的放缩方法,大家怎样看待该不等式的右边?④现在让我们一起来观察不等式 $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 的两边,大家觉得该怎样处理这个不等式右边的式子呢?

设计意图 前三个问题的设计,主要是为了学生能快速发现当 $n \geq 2$ 时,

仅证明 $\frac{1}{\sqrt{n}} > 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 就可以了.而第四个问题的提出,意在引导学生将式子 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ 进行“有理化”处理,证得 $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,顺利解决问题.

随着师生的共同研究,第一种形式的不等式的根源被探寻出来,也就是将不等式 $a_1+a_2+\cdots+a_n < f(n)$ 的右边视为一个数列的前 n 项和,当 $n \geq 2$ 时,借助 $c_n=S_n-S_{n-1}=f(n)-f(n-1)$ 获取通项 c_n ,然后证得通项 a_n 与 c_n 的大小.

2. 第二种形式的探索
板演:类似 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n < f(n)$ 的形式,可记 $T_n=f(n)$,当 $n \geq 2$ 时,记 $c_n=\frac{T_n}{T_{n-1}}=\frac{f(n)}{f(n-1)}$.

师:请大家想一想,此时仅需证明什么?

师生、生生经过共同讨论,一致认为:仅需证明 $a_n < c_n$,再进行累乘就能完成证明.为了进一步夯实学生对这一类形式的认识,笔者提出一个实例与学生共同研究.与第一种形式类似,为了充分挖掘学生思维的潜

能,让学生进入深度思考,笔者以问题串的方式进行了思维点拨,取得了较好的成效.

例2 若 $n \in \mathbf{N}^*$,证明: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

思路点拨 ①说一说该不等式的左边是多少项的积?②该不等式的左边是否可以用我们所熟悉的公式求积?③从第二种形式的放缩方法出发,大家怎样看待该不等式的右边?

④我们该怎样证明 $\frac{2n-1}{2n} < \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$?

设计意图 问题串的应用在于启思与挖掘学生的潜能,前三个问题的提出,意在让学生发现当 $n \geq 2$ 时,只要证明 $\frac{2n-1}{2n} < \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1}}$ 即可.第四个问

题的提出,则起到了“四两拨千斤”的作用,即只要将不等式的两边同时平方,再对角相乘,就能顺利完成证明.

通过以上引导与探究,学生很快就发现第二种形式的不等式的根源在于将不等式 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_n < f(n)$ 的右边视为一个数列的前 n 项积,当 $n \geq 2$

时,借助 $c_n = \frac{T_n}{T_{n-1}} = \frac{f(n)}{f(n-1)}$ 获取通项 c_n ,

然后证得通项 a_n 与 c_n 的大小.

3. 第三种形式的探索

例3 若 $a_n = 3^n - 1$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, T_n 为数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 的前 n

项和,求证: $T_n < \frac{3}{4}$.

思路点拨 ①分析数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 属于

递增数列还是递减数列;② $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是否

可以放缩成等比数列求和?③若 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$

可以放缩成等比数列,则放缩成的等比数列的公比是多少?

师:经探索,仅需证明不等式 $\frac{1}{a_n} <$

$\frac{\lambda}{3^n}$ (λ 为常数)恒成立,也就是证明 $\lambda >$

$\frac{3^n}{3^n - 1}$ 恒成立即可. 设 $g(n) = \frac{3^n}{3^n - 1}$,此时可以怎样获得 $g(n)$ 的最大值呢?

生:借助拆项思想,根据 $g(n) = \frac{3^n}{3^n - 1} = 1 + \frac{1}{3^n - 1}$ 是递减数列,可得 $g(1) =$

$\frac{3}{2}$ 是 $g(n)$ 的最大项,因此 $\lambda > \frac{3}{2}$.至此,后面的证明就简单了.

从此例可以看出学生的思维正处于活跃状态,对数列的放缩有了较深刻的认识. 为了让学生获得举一反三的能力,达到深度学习的目的,笔者在此处加上了变式训练.

变式题1 若 $a_n = \frac{5}{2^{2n+1} - 5}$ ($n \in \mathbf{N}^*$)

为数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,证明: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < 2$.

师:结合例3,请大家思考:想要证明该不等式,需要构造一个怎样的不等式? 如根据不等式 $\frac{5}{2^{2n+1} - 5} \leq \frac{5\lambda}{4^n}$

恒成立的条件,我们知道 $\lambda \geq \frac{4}{3}$.

设计意图 此问意在激发学生的认知冲突,驱动学生的探索欲,让学生通过类比思想的应用自主获得解决问题的办法.

学生经过放缩后发现不等号的左边大于右边,显然是一个失败的证明,但看到了放缩法的注意点,即放缩要有“度”. 基于此,学生经过合作交流发现这一类问题可通过保留第一项或前两项来解决问题.

师:如果本题保留第一项,我们从第二项开始放缩,此时 λ 的最小值是多少? 请大家按照此思路来证明本题.

变式题2 若 $a_n = \frac{2^n}{3^n - 2^n}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 为

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,证明: $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{22}{5}$.

思路点拨 ①类比上述两个变式题,是否可以将变式题2转换成变式题1的形式?②证明变式题2需要如变式题1一样保留第一项吗?

例4 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项

和,同时 $S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3} \times 2^{n+1} + \frac{2}{3}$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1)写出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)已知 $T_n = \frac{2^n}{S_n}$,求证: $T_1 + T_2 + \cdots +$

$T_n < \frac{3}{2}$.

思路点拨 ①在已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的情况下,该如何求通项

a_n ? ②怎样证明 $T_n = \frac{3 \cdot 2^{n-1}}{2^{2n+1} - 3 \cdot 2^{n+1}} < \frac{3}{2}$?

③本题是否可以借助例3的模型求解? 说说理由. ④观察式子中的分母,说说你的发现. ⑤接下来该用哪种方法求和?

通过例3的探索与两个变式题的分析,学生发现形如 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n < k$ (k 为常数)的不等式,左边可以转化成

$c_n = \frac{1}{a^n + b}$ ($a > 1, n \in \mathbf{N}^*$) 的形式,构造

$\frac{1}{a^n + b} \leq \frac{\lambda}{a^n}$ 恒成立,然后借助等比数

列求和进行证明,证明过程需要关注前几项保留的问题;还可以将左边转

化成 $c_n = \frac{n}{(a^{n+1} - m)(a^n - m)}$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$,

$m, n \neq 0$) 的形式,然后利用裂项相消法求和进行证明.

教学思考

通过对课例的分析,不难发现教师的点拨对揭露知识本质、发展学生的数学学科核心素养具有重要意义.

在课堂教学中,教师对思路的点拨应遵循以下几个原则:①循序渐进,逐步点拨. 遵循学生的认知发展规律,从学生原有认知结构出发,可帮助学生进行新旧知识的衔接,为建构新知夯实基础. ②直观呈现,启发思维. 虽说数学是一门抽象的学科,但直观想象是数学学科核心素养的六大要素之一,想要促进该素养的提升,离不开直观的作用,这是启发思维的关键. ③强化训练,拓展思路. 解题技巧的形成离不开练习训练的支撑,综合性问题的应用与思路点拨能进一步挖掘学生的潜能,拓宽学生的思路.