巧用“两招”，破解数列不等式问题

施冰洁

数列不等式问题具有较强的综合性，需综合运用数列、不等式、函数等知识求解.很多同学在解题时不知如何下手.下面结合例题，介绍两个解答数列不等式问题的“妙招”，以供参考.

一、放缩不等式

运用放缩法求解数列不等式问题主要有两种思路，一是将数列的通项公式进行放缩，以将其裂为两项之差，或将其变形为等差、等比数列的通项公式的积与和，再运用裂项相消法、错位相减法、分组求和法等求数列的和；二是先对数列进行求和，然后将所求的和进行放缩，从而证明不等式.

例1. 已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$a_n+\frac{1}{a_n}=2S_n, n\in N^*$.

(1)求证：数列$\{S_n^2\}$是等差数列.

(2)记数列$b_n=2S_n^3, T_n=\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\cdots+\frac{1}{b_n}$，证明：$1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<T_n\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}$.

解：(1)略；(2)令$n=1$，由$a_n+\frac{1}{a_n}=2S_n$可得：$a_1+\frac{1}{a_1}=2a_1$，

解得$a_1=1$，即$S_1=1$，

因为$\{S_n^2\}$为等差数列，所以$S_n^2=S_1^2+(n-1)=n$，

所以$S_n=\sqrt{n}$，则$b_n=2n\sqrt{n}$，可得$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2n\sqrt{n}}$.

$$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n\cdot2\sqrt{n}}<\frac{1}{n\left(\sqrt{n-1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{n}<\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{\sqrt{n(n-1)}}=\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}(n\geqslant2)，$$

当$n\geqslant2$时，$T_n<\frac{1}{b_1}+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{2}+1-\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}$，

当$n=1$时，$T_1=\frac{1}{2}=\frac{3}{2}-1$，则$T_n\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{n\cdot2\sqrt{n}}>\frac{1}{n\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}>\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}，$$

则$T_n>\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

点，就可以求出参数的范围.

例3. 已知$f(x)$为偶函数，对$\forall x\in R$，有$f(x+2)=f(x)-f(1)$，当$x\in[2,3]$时，$f(x)=-2x^2+12x-18$.若函数$y=f(x)-\log_a(|x|+1)$在$(0,+\infty)$上至少有3个零点，则a的取值范围是(　　).

A.$\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$　B.$\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$　C.$\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$　D.$\left(0,\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

解：令$x=-1$，由$f(x+2)=f(x)-f(1)$可得$f(1)=f(-1)-f(1)$，

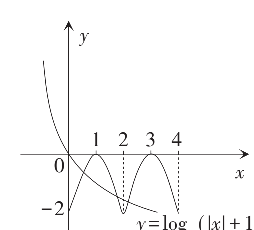
而$f(x)$为偶函数，则$f(1)=f(-1)$，所以$f(1)=0$，

所以$f(x+2)=f(x)$，故$f(x)$是周期为2的函数.

令$f(x)-\log_a(|x|+1)=0$，即$f(x)=\log_a(|x|+1)$，

要使函数$y=f(x)-\log_a(|x|+1)$在$(0,+\infty)$上至少有3个零点，需使$f(x)$与$y=\log_a(|x|+1)$至少有3个交点.

画出$f(x)$在$x\in[2,3]$的图象，并根据函数的周期性和对称性作出如图所示的图象，



由图象可知：当$a>1$时，$f(x)$与$y=\log_a(|x|+1)$不可能有3个交点，

当$0<a<1$时，需使$f(x)$与$y=\log_a(|x|+1)$至少有3个交点，需使$\log_a(|2|+1)>f(2)=-2$，

即$\log_a3>-2=\log_a a^{-2}$，解得$0<a<\frac{\sqrt{3}}{3}$.故本题选B项.

我们根据零点的定义，将问题转化为函数$f(x)$与$y=\log_a(|x|+1)$至少有3个交点的问题，画出两个函数的图象，通过讨论函数$f(x)$与$y=\log_a(|x|+1)$至少有3个交点的情形，建立关系式，从而求得参数的取值范围.

总之，由函数零点的个数求参数的取值范围，不仅需要灵活运用导数、方程、不等式知识，还需运用分类讨论思想、数形结合思想、转化思想来辅助解题.

(作者单位：江西省吉安市阳明中学)

$=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

综上所述，$1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}<T_n\leqslant\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}$.

解答本题主要运用了放缩法．由于$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2n\sqrt{n}}$,所以需考虑将其放缩，于是结合不等号的方向进行裂项、放缩，运用列项相消法求得数列的和，从而证明不等式．对于根式，常用的放缩方式为：$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

例2. 已知函数$f(x)=\ln x-\frac{a-1}{x}+2a(a\in\mathrm{R})$.

(1)若$f(x)\leqslant ax+1$在$[1,+\infty)$上恒成立，求a的取值范围；

(2)若$n\in\mathrm{N}^*$，证明：$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{n}{2(n+1)}$.

解：(1)略；(2)要证$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{n}{2(n+1)}$,只需证$\ln(n+1)+\frac{n}{2(n+1)}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$,

由(1)可知，当$a=\frac{1}{2}$时，$\ln x\leqslant\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})(x\geqslant1)$,

设$x=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}>1$,

可得$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$,

则 $\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{2}(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n})$, …, $\ln3-\ln2<\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+\frac{1}{3})$,$\ln2-\ln1<\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})$.

将上述不等式累加得$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{n}{2(n+1)}$.

解答问题(2)，需先运用问题(1)的结论，得出当$a=\frac{1}{2}$时，$\ln x\leqslant\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})(x\geqslant1)$；然后令$x=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}>1$,得出不等式$\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})$；再令$n$=1,2,3,…,$n$−1,并将这$n$−1个式子累加，即可根据不等式的可加性将不等式进行放缩，从而证明不等式．在解题时，通常可运用一些重要不等式、已有的结论、不等式的性质对不等式进行放缩，再通过求和来证明数列不等式．

二、构造函数

数列是一个特殊的函数，其自变量为正整数．在解答数列不等式问题时，可仔细研究数列各项的变化规律，以判断出数列的单调性，从而根据数列的单调性证明不等式．还可以根据题意构造出合适的函数；然后研究函数的单调性；再利用函数的单调性、最值来证明数列不等式．

例3. 设$n\in\mathrm{N}^*$，证明：$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$.

证明：设数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$,数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$,则$S_n=\ln(n+1)$,

当$n\geqslant2$时，$b_n=S_n-S_{n-1}=\ln(n+1)-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}$,

令$t=\sqrt{\frac{n+1}{n}}$,因为$n\in\mathrm{N}^*$,所以$t=\sqrt{\frac{n+1}{n}}>1$.

设$\phi(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$,

则$\phi'(t)=1+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}=\frac{(t-1)^2}{t^2}$,

则$\phi'(t)>0$在$(1,+\infty)$上恒成立，

所以$\phi(t)>\phi(1)=0$,即$t-\frac{1}{t}>2\ln t(t>1)$,

所以$\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}>\ln\frac{(n+1)}{n}$在$n\in\mathrm{N}^*$上恒成立，

所以 $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln\frac{(n+1)}{n}$, $\frac{1}{\sqrt{(n-1)^2+(n-1)}}>\ln\frac{n}{n-1}$,…,$\frac{1}{\sqrt{3^2+3}}>\ln\frac{3}{2}$,$\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}>\ln2$,

将上述不等式相加可得$\frac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$.

构造出函数$\phi(t)=t-\frac{1}{t}-2\ln t(t>1)$并判断出函数的单调性，即可根据函数的单调性得出$t-\frac{1}{t}>2\ln t(t>1)$,得到不等式$\sqrt{\frac{n+1}{n}}-\sqrt{\frac{n}{n+1}}>\ln\frac{(n+1)}{n}$,从而证明不等式．

虽然数列不等式问题较为复杂，但是我们只要仔细研究数列不等式的结构特征，对其进行合理的变形，研究数列的单调性，灵活运用不等式的性质或重要不等式来对不等式进行合理的放缩，就能顺利证明不等式．

(作者单位：江苏省如东县马塘中学)