# 巧放缩,妙证数列不等式

李英娟
(山东省安丘市实验中学)

证明数列不等式是一类较为常见的问题,这类问题集数列、函数与不等式等知识于一体,能较好地考查考生的逻辑推理和数学运算等核心素养.解答这类问题一般可考虑放缩法.本文结合具体例题谈谈放缩法在求解这类问题中的运用.

## 1 把原数列通项放缩成等差数列

当数列的通项已知,且它的前 $n$ 项和不可求时,要证明它的前 $n$ 项和介于两个关于 $n$ 的函数式之间,我们不妨把它放缩成等差数列进行求和.

**例1** 若 $a_n=\sqrt{n(n+1)}\,(n\in\mathbf{N}^*)$,且数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,求证:$\dfrac{n(n+1)}{2}<S_n<\dfrac{1}{3}(n+1)^3$.

**解析** 因为 $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$,所以

$$1+2+\cdots+n<\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\sqrt{3\times4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<2+3+\cdots+(n+1),$$

则

$$\frac{n(n+1)}{2}<\sqrt{1\times2}+\sqrt{2\times3}+\sqrt{3\times4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}<\frac{n(n+3)}{2},$$

又

$$2(n+1)^3-3n(n+3)=(2n^3+2)+3n(n-1),$$

且 $n\in\mathbf{N}^*$,所以$(2n^3+2)+3n(n-1)>0$,即 $2(n+1)^3-3n(n+3)>0$,则 $\dfrac{(n+1)^3}{3}>\dfrac{n(n+3)}{2}$,故 $\dfrac{n(n+1)}{2}<S_n<\dfrac{1}{3}(n+1)^3$.

**点评** 本题先将数列$\{\sqrt{n(n+1)}\}$分别放缩成等差数列$\{n\}$和$\{n+1\}$,再结合等差数列的求和公式以及不等式的性质进行证明.

## 2 把原数列通项放缩成等比数列

对于与求和有关的数列不等式的证明问题,当数列的通项不是等比数列,却含有指数幂时,我们不妨将通项适当放缩成等比数列进行求和.

**例2** 记数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,且 $S_n=2a_n+n-3\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求证:数列$\{a_n-1\}$是等比数列;

(2)求证:$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

**解析** (1)由于 $S_n=2a_n+n-3$,故 $S_{n-1}=2a_{n-1}+(n-1)-3\,(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}+1$,则 $a_n=2a_{n-1}-1\,(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,即 $a_n-1=2(a_{n-1}-1)\,(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,结合 $a_1=S_1=2a_1-2$,可得 $a_1=2$,故数列$\{a_n-1\}$是首项为1、公比为2的等比数列.

(2)由(1)可知 $a_n=2^{n-1}+1$,$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2^{n-1}+1}<\dfrac{1}{2^{n-1}}$,所以

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}},$$

又因为$\dfrac{1}{2^{n-1}}>0$,所以$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}<2$.

**点评** 本题的第(2)问是在第(1)问的基础上得到 $\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2^{n-1}+1}<\dfrac{1}{2^{n-1}}$,经过放缩把非等比数列问题转化成等比数列问题,再利用等比数列求和公式解题.

## 3 把原数列的递推关系放缩成可累乘的数列

当待证的数列不等式的一边出现 $n$ 个式子相乘却无法累乘消元时,我们不妨对 $n$ 个式子的通项进行适当放缩,为利用累乘法解题创造条件.

**例3** 设数列$\{a_n\}$的前 $n$ 项和为 $S_n$,$a_1=2$,且 $S_n$ 满足 $2S_n=(n+1)a_n\,(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)证明:对一切正整数 $n$,有

$$\frac{a_1+1}{a_1}\times\frac{a_2+1}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n+1}{a_n}>\sqrt{n+1}.$$

**解析** (1)当 $n\geqslant 2$ 时，$2S_n=(n+1)a_n$，$2S_{n-1}=na_{n-1}$，两式相减得 $2a_n=(n+1)a_n-na_{n-1}$，整理可得 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}$，而 $\frac{a_1}{1}=2$，所以 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是首项为 2、公比为 1 的等比数列，故 $\frac{a_n}{n}=2$，即 $a_n=2n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)由 $\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{\frac{4n^2+4n}{4n^2}}=\sqrt{\frac{n+1}{n}}$，可得

$$\frac{a_1+1}{a_1}\times\frac{a_2+1}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n+1}{a_n}>\sqrt{\frac{1+1}{1}}\times\sqrt{\frac{2+1}{2}}\times\sqrt{\frac{3+1}{3}}\times\cdots\times\sqrt{\frac{n+1}{n}}=\sqrt{n+1},$$

所以 $\frac{a_1+1}{a_1}\times\frac{a_2+1}{a_2}\times\cdots\times\frac{a_n+1}{a_n}>\sqrt{n+1}$.

**点评** 本题第(1)问利用 $a_n$ 和 $S_n$ 的关系可求得 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}$，根据等比数列的定义易知 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等比数列，进而写出 $\{a_n\}$ 的通项公式.第(2)问则对递推关系进行了放缩，即 $\frac{a_n+1}{a_n}=\frac{2n+1}{2n}>\sqrt{\frac{n+1}{n}}$，放缩的目的是应用累乘法来证明.

## 4 把原数列放缩成可裂项求和的数列

在与数列求和有关的不等式证明问题中，若题设给出的数列不具备裂项求和的特征，往往可以将其适当放缩成可裂项求和的数列.

**例 4** 已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1$，$a_n=\sqrt{1+a_{n-1}^2}$ $(n\geqslant 2)$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)若 $c_n=a_{2n-1}$，数列 $\left\{\frac{1}{c_n}\right\}$ 的前 $n$ 项和为 $T_n$，证明：$a_{2n+1}-1<T_n\leqslant a_{2n-1}$.

**解析** (1)将 $a_n=\sqrt{1+a_{n-1}^2}$ $(n\geqslant 2)$ 两边同时平方，整理得 $a_n^2-a_{n-1}^2=1(n\geqslant 2)$，所以数列 $\{a_n^2\}$ 是首项为 $a_1^2=1$、公差为 1 的等差数列，故

$$a_n^2=1+(n-1)\times 1=n.$$

又 $a_n>0$，所以 $a_n=\sqrt{n}$.

(2)由(1)可得 $c_n=a_{2n-1}=\sqrt{2n-1}$，则 $\frac{1}{c_n}=\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

先证 $T_n\leqslant a_{2n-1}$.当 $n=1$ 时，$a_1=1$，$T_1=1$，满足 $T_n\leqslant a_{2n-1}$.当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\frac{1}{c_n}=\frac{1}{\sqrt{2n-1}}=\frac{2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-1}}<\frac{2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-3}}=\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3},$$

所以

$$T_n<1+(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n-3})=\sqrt{2n-1}=a_{2n-1},$$

故 $T_n\leqslant a_{2n-1}$ 得证.

再证 $T_n>a_{2n+1}-1$.因为

$$\frac{1}{c_n}=\frac{1}{\sqrt{2n-1}}=\frac{2}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n-1}}>\frac{2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1},$$

所以

$$T_n>(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=\sqrt{2n+1}-1=a_{2n+1}-1,$$

故 $a_{2n+1}-1<T_n\leqslant a_{2n-1}$ 成立.

**点评** 本题考查等差数列通项公式的求解以及利用放缩法证明不等式，本题第(2)问的难点是对通项公式进行放缩，放缩后，再进行裂项相消法求和.

从以上四种放缩方法不难看出，采用放缩法来证明数列不等式时，不仅要根据数列及其通项公式的特征来选择合理的方法进行放缩，而且要将放缩的“度”控制得恰到好处，有时对于同一个问题的证明，可能要用到多种放缩方式.如何选择最合适、最有效的放缩方法，没有统一标准，我们只有对问题进行深入细致的探究，才能作出正确的选择.

(完)