学习的组织者、引导者与合作者．2022版新课标中提出“使人人都能获得良好的数学教育，不同的人在数学上得到不同的发展”，这就要求教师在教学中要设置有梯度的学习任务，让不同水平的学生都能在课堂上有所收获，要注重启发式追问，激发学生兴趣，引发学生积极思考．

本节课采用自主探索、启发引导、合作交流的方式展开教学，精心设计了有梯度的问题串，引导学生操作、归纳、猜测、验证、表达，在这个过程中渗透数学思想方法，以知识的发生发展为载体，给学生提供实质性思考的契机．引导学生以数学的思维，构建数学的逻辑体系，培养学习兴趣和科学态度，初步养成有条理的思维品质，逐步形成理性精神，以发挥数学学科的育人作用．

参考文献

[1]中华人民共和国教育部．义务教育数学课程标准（2022年版）[S]．北京：北京师范大学出版社，2022

[2]章建跃．理解数学，理解学生，理解教学[J]．中国数学教育，2010（12）：3-7，15

[3]章建跃．理解数学是教好数学的前提[J]．数学通报，2015（4）：61-63

[4]雍亚波．运算更高效，题型更丰富，思考更深入[J]．教材教法，2020（11）：24-25

基于课后习题研究的高中数学二轮复习

——以动点的轨迹方程为例

吴燕瑜　　福建省石狮市永宁中学（362700）

通过高三数学第一轮的复习，多数学生基本掌握了高中数学知识，并初步形成了知识体系，积累了一定的解题经验．以往的教学经验表明，考试导向的专题复习模式不利于我校学生解决问题能力的培养．因为考试导向的专题复习模式题型太过丰富，思维跨度比较大，复习周期长，笔者所处的学校是一所农村校，所教的学生都是全市中下水平的学生，极易导致学生陷入“疲乏期”，收效甚微．

因此，笔者在二轮复习的形式和专题设置、选择上作了尝试和改进，更多地采用“微专题”．实践证明，这样的复习方式更适合我校的学生．针对我校的生情，微专题复习的切入点宜“小”不宜“大”．

1 问题的提出

笔者通过对本校学生在泉州市2023届高中毕业班质量监测二及泉州市2022届高中毕业班三次的质量监测的答题情况及平时的典型考题测试，收集并分析相关数据，发现学生对圆锥曲线的轨迹方程产生畏惧心理．几次质量监测均考查了圆锥曲线的相关知识，对直接用待定系数法求轨迹方程的题型，多数学生在一轮复习后，基本能做得出来．但是，如2023届泉州质量监测（二）第22题的第（1）问，及2022届泉州质量监测（三）第21题的第（1）问，变换了考法，就给很多学生造成了心理压力，导致学生丢分严重，而这类题型，解题的关键往往是第一问能否求出轨迹方程．

分析原因，学生对轨迹方程的基本方法在一轮复习之后已有了一定的认识，但是解这种问题时，不擅长找出问题的内部规律及知识之间的相互联系，动辄排列一大堆的坐标关系，进行无目的大量运算，以致许多学生丧失信心，功亏一篑．

2 对策分析

在二轮复习中，根据学生学习的这一“困难点”，设计针对性的微专题，有效化解难点是非常有必要的．本微专题的学习目标是：总结和概括探究轨迹方程的常用方法，并形成相应的解题模板，提升学生的解题能力，优化学生的解题思路．

基于以上的学习目标，在微专题的例题及习题的选择上，要求要有典型性和多样性，要有一定数量的基础题，由浅入深，循序渐进．其实，在高三的复习过程中，有一个重要的资料常常被我们忽略了，那就是教材．教材应该是学生夯实基础的根本，教材中也有很多的习题有研究的价值，高考卷中的有些题目就是根据教材中的习题改编的．

新教材将曲线与方程这一节删除，近年来各地模拟题陷入误区，认为圆锥曲线的轨迹问题不会再考查．但是新教材中将这一部分内容放在了后面椭圆、双曲线、抛物线等章节中，有大量的课本例题、课后习题都涉及轨迹方程问题，因此其地位并没有

下降！因此，本微专题将新教材人教A版选择性必修第一册中与轨迹方程有关的题目进行改编和整合，既体现了基础性，也符合了系统性，同时在夯实基础知识的同时，学生还能有所提高．以下是笔者对本微专题的例题及习题的设计．

3 设计过程

典型例题1 （原创题 改编人教A版选择性必修第一册 P89・9）在平面直角坐标系 xOy 中，已知动点 P 到两定点 $O(0,0)$，$A(3,0)$ 的距离之比等于 $\lambda(\lambda>0)$，

（1）若 $\lambda=1$，求动点 P 的轨迹方程；

（2）若 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，设动点 P 的轨迹为 E，求轨迹 E 的方程．

设计意图 （1）通过本道例题，教师可补充阿波罗尼斯圆的知识：平面内到两定点距离之比等于常数的动点轨迹为直线或圆．这个知识点出现在人教A版选择性必修第一册 $P97$ 例题6的思考题中，对于学习成绩较好的同学，利用阿波罗尼斯圆的知识可以解决一类最值问题，掌握这个知识点，可以获得提高．

（2）归纳本题的条件：题目中只有一个动点，已知关于动点的等量关系式，但不知动点轨迹是何种曲线，可用直接法求轨迹方程．总结直接法求动点的轨迹方程的解题套路：

表1

考向	条件分析	解题套路化
直接法求动点轨迹方程	有一个动点、动点满足明显的等量关系式	设所求动点 $P(x,y)$（若无坐标系，需选定适当位置的坐标系）→寻找题目中的等量关系（有时动点轨迹的数量关系不明显，可借助平面几何中的有关定理、性质，如勾股定理、垂径定理、中线定理等）→运用有关公式（如两点间距离公式、点到直线距离公式、夹角公式等）代入动点坐标→作出相应的恒等变换得轨迹方程

典型例题2（原创题，改编自人教A版选择性必修第一册 P87 例5）

已知圆 $E:(x+1)^2+y^2=4$ 上，定点 $M(3,0)$，

（1）已知线段 PM 的端点 P 在圆 E 上运动，求线段 PM 的中点 N 的轨迹方程；

（2）过定点 M 任意作直线 l 与圆 E 交于 R,S 两点，求弦 RS 中点 T 的轨迹方程．

设计意图 第（1）问是多动点问题，采用相关点法，它解决动点的轨迹方程问题的解题形式比较固定，可形成解题模板．第（2）问是中点弦问题，一般的解题思路是：①若是与圆的相交弦，利用圆的几何性质：圆心与弦中点的连线与弦垂直，再将垂直条件进行转化，可转化为向量垂直或者夹角为 90°，再作进一步的等量转化．②若是与其他二次曲线的相交弦，则可用参数法或点差法．

下面将本例题形成通用的解题模板总结如下：

表2

考向	条件分析	解题套路化
相关点法求动点轨迹方程	有两个动点，其中一动点的轨迹方程已知	设所求动点 $N(x,y)$→寻求所求动点 N 与已知动点 $P(x_0,y_0)$ 之间的关系→建立 N,P 两坐标间的关系，用分别用 x,y 表示出 x_0,y_0→将 x_0,y_0 代入已知曲线方程化简求解
参数法求动点轨迹方程	过定点的直线与曲线有两个交点，动点为弦的中点	设所求中点 $M(x,y)$，利用点斜式设直线方程（注意是否需要考虑斜率存不存在问题）→联立直线与曲线方程，消 x（或 y）得一元二次方程→韦达定理求出中点坐标，中点坐标与参数有关，如 k（要考虑根的差别式，确定参数范围）→消掉参数得到关于变量 x,y 的方程
点差法求动点轨迹方程	过定点的直线与曲线有两个交点，动点为弦的中点	设所求中点 $M(x,y)$，定点 $N(x_0,y_0)$，弦的两个端点 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$→将 PQ 坐标代入曲线方程，两曲线方程作差→利用平方差公式将变量进行转化：$x_1+x_2=2x$，$y_1+y_2=2y$，$\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$→整理得关于变量 x,y 的方程

典型例题3（原创题，改编自人教A版选择性必修第一册 P115・6）已知圆 $E:(x+1)^2+y^2=4$，圆心为 E，定点 $B(1,0)$，P 为圆 E 上任意一点，线段 BP 的垂直平分线 l 和半径 EP 相交于点 Q，求动点 Q 的轨迹方程．

变式训练 （原创题，改编自人教A版选择性必修第一册 P127・5）已知圆 $E:(x+1)^2+y^2=1$，圆心为 E，定点 $C(1,0)$，P 为圆 E 上任意一点，线段 CP 的垂直平分线 l 和直线 EP 相交于点 G，求动点 G 的轨迹方程．

设计意图 本题用定义法，若动点运动的规律满足某种曲线的定义，则可根据曲线的定义直接写出动点的轨迹方程，此法一般用于求圆锥曲线的方程，在高考中常以填空、选择的形式出现．熟悉一些基本曲线的定义是用定义法求曲线方程的关键．

表3

考向	条件分析	解题套路化
定义法求动点轨迹方程	(1) 若题目中出现定点与定量，考虑圆；(2) 若题目中出现两定点关于原点对称，又有定量，考虑椭圆或双曲线；(3) 若题目出现定点与定直线，考虑抛物线	若动点运动的规律满足某种曲线的定义，则可根据曲线的定义直接写出动点的轨迹方程．要求学生具备：(一) 熟知各曲线的定义；(二) 熟练掌握平面几何的一些性质定理．基本步骤：定量→定形→定方程

4 基于课后习题研究的微专题复习课的思考

经过一轮复习，学生能较熟练地解决用待定系数法求轨迹方程的题型．教师在教学过程中，要理解二轮复习与一轮复习的区别：把“知识系统化，方法系列化，能力素养化，解题程序化”作为实现路径与方法．同时，还要探索回归教材与班本微专题的教学整合．教材是教学之本，要加强对教材例题、习题的探究，注重对教材的挖掘和利用．

参考文献

[1]中华人民共和国教育部．普通高中数学课程标准[S]．北京：人民教育出版社，2017

[2]章建跃，李增沪主编．数学选择性必修（第一册）[M]．北京：人民教育出版社，2019

[3]张灿．基于问题设计的高三数学微专题教学实践——分段函数中的多元变量问题[J]．福建中学数学，2021 (1)：22-25

突破高三复习瓶颈，可视化教学实践初探

孙昌洋　　浙江省绍兴市柯桥区越崎中学（312000）

1 引言

在高三数学复习中，常常会遇到一些不易表达的数学问题（如立体几何中的动态问题、含参分段函数、平面向量的几何描述），对于这些问题，许多教师往往一语带过，认为学生应该懂的，而实际上，这些正是学生理解的瓶颈，学生们对问题的本质无法深入，对问题的根源无法探究，似懂非懂，对于同样问题的变式难以解决．比如在动态背景下的立体几何问题教学中，如果采用传统板书教学，动态过程无法显式呈现，只能让学生在图形的想象中完成这一复杂过程，对于一般学生来说，具有较大的挑战性．

现阶段，随着信息技术的不断发展，数学课堂与信息技术的高效整合成为一种趋势．例如，上面提到的动态立体几何问题，教师可以通过GeoGebra软件实时动态演示，逐层分析，变式教学，让学生看得清楚、想得明白，从本质上抓住问题的关键，从而提升直观想象能力．下面以一节高三复习课中的一道立体几何填空题为例，进行课堂演示的实例分析和可视化教学的探索．

2 可视化教学实例分析

例1 如图1所示，在棱长为4的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是棱 A_1A 上的动点，N 是棱 BC 的中点．当平面 D_1MN 与底面 $ABCD$ 所成锐二面角最小时，$A_1M=$______．

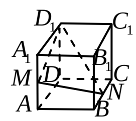

图1

此题主要考查学生的空间作图能力和空间想象能力．由于此题建坐标系方便，动点唯一，所以利用空间向量，含参计算，也可求解．但此解法没有揭示二面角的动态变化过程，对于双动点、最值模式下的其它变式问题，如截面面积、周长的计算等无法解决．为进一步对此题进行探源，需要对此锐二面角的形成与动态变化过程中进行探究．下面利用 GeoGebra 软件一探究竟．

课堂上，教师通过设问，学生会较为快速地提出二面角的构造方法：

教师：如何找到平面 D_1MN 与底面 $ABCD$ 的交线？

学生：延长 D_1M，DA 交于点 E，连接 EN，即为两平面的交线．（打开 GeoGebra 软件，导入已做