极限思想在高中数学中的运用
——以圆锥曲线为例

姚　婷　吴如光　(南京师范大学附属中学秦淮科技高中　210003)

摘　要　极限思想是一种重要的数学思想,贯穿高中数学的学习.以圆锥曲线为例,利用极限思想往往可以引导解题方向、规避复杂运算、突破解题难点.

关键词　极限思想;圆锥曲线;无限趋近
文章编号　1004-1176(2022)09-0060-04

1　背景分析

极限对于学生来说并不陌生,小学阶段对于无穷大的数的感悟,初中阶段对于反比例函数图象的探究,高中阶段对于加速度概念的理解,无一不渗透着极限思想.章建跃博士在文[1]中指出:"在中学阶段,掌握一些微积分的初步知识,对发展学生的理性思维、增强数学应用能力等都是非常有用的."极限思想是一种重要的数学思想,虽然高中数学教材中没有明确极限的概念,但极限思想却始终贯穿着高中数学的学习,以导数为典型,解析几何、立体几何、数列、三角函数等内容的学习过程中也绕不开极限.虽然高等数学中用"ε-δ"语言表述的极限定义对于中学生来讲难以接受,但是极限思想却是可以在学习中不断渗透的.利用极限思想,往往可以引导解题方向、规避复杂运算、突破解题难点.本文将结合圆锥曲线谈谈极限思想在高中数学中的运用.

2　引例分析

近日,笔者在教学中遇到这样一道解析几何综合题:已知点$P\left(-1,\frac{3}{2}\right)$是椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点,$F_1,F_2$分别是椭圆的左、右焦点,$PF_1+PF_2=4$.设直线$l$不经过点$P$且与椭圆$C$相交于$A,B$两点.若直线$PA$与直线$PB$的斜率之和为1,问直线$l$是否过定点?证明你的结论.

易得椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.可设直线$l$的方程$y=kx+m$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,运用方程思想将直线方程与椭圆方程联立,通过韦达定理得$x_1+x_2=\frac{-8km}{3+4k^2}$,$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$,$\Delta=48(4k^2-m^2+3)>0$.再由直线$PA$与直线$PB$的斜率之和为1得$\frac{y_1-\frac{3}{2}}{x_1+1}+\frac{y_2-\frac{3}{2}}{x_2+1}=1$,整理得$(2k-1)x_1x_2+\left(k+m-\frac{5}{2}\right)(x_1+x_2)+2m-4=0$,化简得$2m^2-3m+8k^2+12k-10km=0$,因式分解得$(m-4k)(2m-2k-3)=0$,从而确定直线$l:y=k(x+4)$过定点$(-4,0)$.

在高三一轮复习过程中,笔者发现,学生能熟练运用方程思想联立方程组,并通过韦达定理得A,B两点坐标之间的关系,解题的难点在于,转化条件$k_{PA}+k_{PB}=1$后得到的关于k,m的二次式该如何处置?有经验的学生知道要因式分解,但不知如何分解.如果能顺利分解因式,问题就迎刃而解.教学中教师如果仅仅告知学生,这一步需要因式分解,即便教会学生"双十字相乘"因式分解法,学生对于相似的题型仍然是茫然的.解题教学不应当局限于这一道题的解法,更应引导学生厘清问题的本质.

笔者认为,有几个问题是必须要搞清楚的:①为什么直线l过定点?②为什么需要因式分解?③因式分解后得到的因式之一恰好过点P,这是偶然还是必然?④最后求得的定点在x轴上,这又是偶然还是必然?首先关于问题①②,直线l的方程为$y=kx+m$,由于$k_{PA}+k_{PB}=1$,直线l中的参数k,m必然有着确定的关系,故直线l有可能过定点或定斜率;反之,若直线l过定点,则必存在k与m的线性关系,故得到关于k,m的二次式后需要想办法进行因式分解.

其次,要解决问题③④,就需要搞清楚直线l是如何变化的.教学中可用几何画板或GGB等作图软件来动态演示直线l的变化规律.由于$k_{PA}+k_{PB}=1$,那么k_{PA}确定,k_{PB}随之确定,故只需通过运动点A来探究变化规律.当点A沿椭圆无限趋近于点P时,k_{PA}就无限接近椭圆在点P处的切线的斜率,由椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$上任一点$(x_0,y_0)$处的切线斜率为$-$

$\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=\frac{1}{2}$ 可知，k_{PA} 无限接近$\frac{1}{2}$，而此时，由于 $k_{PA}+k_{PB}=1$，点 B 也在沿椭圆无限趋近于点 P，故 k_{PB} 也无限接近$\frac{1}{2}$，直线 l 在无限逼近点 P 处的切线 l_1.另一方面，当直线 PA 的斜率无限增大，趋向于 $+\infty$ 时，直线 PB 的斜率无限减小，趋向于 $-\infty$，此时，直线 l 无限逼近点 $P'\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$ 处的切线 l_2.l_1 与 l_2 斜率显然不等，故直线 l 不可能定斜率，可能过定点，l_1 与 l_2 关于 x 轴对称，则所经过的定点必在 x 轴上，即为 l_1 与 l_2 的交点 $(-4,0)$.

3 极限思想的运用

3.1 寻找极限位置，确定定点

事实上，对于引例，我们可以作更深层次的思考，若改变题设条件，将“$k_{PA}+k_{PB}=1$”改为“$k_{PA}+k_{PB}=2$”，其余条件、问题不变，探究直线 l 的变化规律.不妨考虑某些特殊位置，当 $k_{PA}=k_{PB}=1$ 时，直线 l 的极限位置是椭圆在点 $P\left(-1,\frac{3}{2}\right)$ 处的切线 l_3；当直线 PA 的斜率无限增大，趋近于 $+\infty$ 时，直线 PB 的斜率无限减小，趋近于 $-\infty$ 时，直线 l 的极限位置就是椭圆在 $P'\left(-1,-\frac{3}{2}\right)$ 处的切线 l_2，显然，l_3 与 l_2 斜率不等，故直线 l 过定点$\left(-\frac{5}{2},-\frac{3}{4}\right)$，即为 l_3 与 l_2 的交点.

更一般地，已知 $P(x_0,y_0)$ 为曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，设直线 l 不经过点 P 且与椭圆 C 相交于 A,B 两点.若直线 PA 与直线 PB 的斜率之和为 λ，则直线 l 过定点$\left(x_0-\frac{2y_0}{\lambda},-y_0-\frac{2b^2x_0}{a^2\lambda}\right)$.而且，由于证明过程是可逆的，反之也成立.

顺势而为，教学时还可以引导学生探究：若 $k_{PA}k_{PB}=1$，直线 l 是否过定点？推广到一般，已知 $P(x_0,y_0)$ 为曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 上一点，设直线 l 不经过点 P 且与椭圆 C 相交于 A,B 两点.若直线 PA 与直线 PB 的斜率之积为 $\lambda\left(\lambda\neq\frac{b^2}{a^2}\right)$，则直线 l 过定点 $\left(\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}x_0,-\frac{\lambda a^2+b^2}{\lambda a^2-b^2}y_0\right)$.探究动直线的变化规律，寻找极限位置，能快速确定定点位置.

3.2 利用极限位置，计算定值

例 1 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆 C 的下顶点和上顶点分别为 B_1，B_2，且 $B_1B_2=2$，过点 $P(0,2)$ 且斜率为 k 的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点.求证：直线 B_1M 与直线 B_2N 的交点 T 的纵坐标为定值.

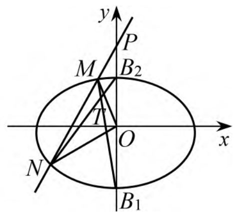

图 1

解析 易得椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，设直线 l 的方程并和椭圆进行联立，得 $x_1+x_2=-\frac{8k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{6}{1+2k^2}$，设 $T(m,n)$，再由 B_1,T,M 在同一条直线上，得$\frac{n+1}{m}=\frac{y_1+1}{x_1}=\frac{kx_1+3}{x_1}=k+\frac{3}{x_1}$；$B_2,T,N$ 在同一条直线上，得$\frac{n-1}{m}=\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{kx_2+1}{x_2}=k+\frac{1}{x_2}$.化简得 $n=\frac{1}{2}$，故交点 T 的纵坐标为定值$\frac{1}{2}$.

点评 换个角度来思考该问题，直线 l 在变化过程中，极限位置是与椭圆相切，此时直线 B_1M 与直线 B_2N 交于一点，该点即为直线 l 与椭圆相切的切点，该点的纵坐标即为所求.利用极限思想，可以快速确定定值.

3.3 运用极限思想，求解范围

例 2 设双曲线 $x_2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2.若点 P 在双曲线上，且 $\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形，则 PF_1+PF_2 的取值范围是______.

解析 由已知得 $a=1,b=\sqrt{3},c=2$，则 $e=\frac{c}{a}=2$，设 $P(x,y)$ 是双曲线上任一点，由对称性不妨设 P 在双曲线的右支上，则 $1<x<2$，$PF_1=2x+1$，$PF_2=2x-1$，$\angle F_1PF_2$ 为锐角，则 $PF_1^2+PF_2^2>F_1F_2^2$，即$(2x+1)^2+(2x-1)^2>42$，解得 $x>\frac{\sqrt{7}}{2}$，所以$\frac{\sqrt{7}}{2}<x<2$，则 $2\sqrt{7}<PF_1+PF_2=4x<8$.

点评 利用极限思想，不妨考虑极限位置(由于双曲线的对称性，可将点 P 置于第一象限来考虑)，当 $\triangle F_1PF_2$ 为直角三角形时，有两种情况：若 $\angle F_1PF_2$ 为直角，$PF_1+PF_2=2$；若 $\angle PF_2F_1$ 为直角，$PF_1+PF_2=8$.由图形上点 P 的运动规律可知，$\triangle F_1PF_2$ 为锐角三角形时，$2\sqrt{7}<PF_1+PF_2<8$.对于填空题，利用极限思想解决范围问题，省时省

力;对于解答题,先探究动点的运动轨迹,可以帮助确定变量.如该题中,PF_1+PF_2 的变化源于点 P,点 P 在第一象限的变化可由横坐标这一单一变量控制,于是只需用点 P 的横坐标来表示目标.引导学生利用极限思想来求解范围,从运动的观点来解决问题,有利于发展学生的理性思维.

4　几点教学建议

4.1　分析极限状态,明辨解题思路

例 3　已知直线 $y=2x$ 与椭圆 $E:x^2+2y^2=1$ 交于 A,B 两点(点 A 在第一象限),点 $P(-4t,t)$ 在椭圆 E 内部,射线 AP,BP 与椭圆 E 的另一交点分别为 C,D.求证:直线 CD 的斜率为定值.

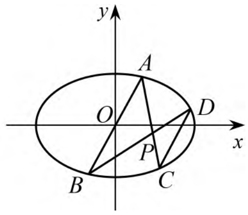

图 2

解析　对于该题,易想到的思路是求出 A,B 两点,联立直线 AP 与椭圆方程得 C 点坐标,联立直线 BP 与椭圆方程得 D 点坐标,再求直线 CD 的斜率.但是,该思路计算量很大,求解困难.不妨利用极限思想重新审视该题,点 P 在定直线 $y=-\frac{1}{4}x$ 上运动,显然直线 $y=-\frac{1}{4}x$ 与椭圆有两个交点,当点 P 无限接近这其中一个交点时,直线 CD 的极限位置就是在该交点处的切线,那么直线 CD 的斜率即为该切线的斜率,易得斜率为 2.还可以考虑另一个极限位置,当点 P 无限接近坐标原点时,直线 CD 的极限位置就是直线 AB,故直线 CD 的斜率为 2.预知直线 CD 的斜率为 2,那么该题的证明思路就更加清晰了,即需证明 $AB\parallel CD$,联想到向量,$\overrightarrow{AP}=\lambda_1\overrightarrow{PC},\overrightarrow{BP}=\lambda_2\overrightarrow{PD}$,即证 $\lambda_1=\lambda_2$.

解析几何的解题思路非常重要,因为计算量大,往往“没有回头路”,教学中一定要引导学生先分析解题思路,理清楚解题步骤,预估计算量,计算时多想两步,才能简化计算,高效解题.利用极限思想判断出直线 CD 的斜率为 2,为后续的证明打开了思路,抓住了变化中的不变量,解题方向更加清晰.

证明　设 $P(x_0,y_0),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),C(x_3,y_3),D(x_4,y_4)$,则 $x_0+4y_0=0,x_1^2+2y_1^2=1,x_2^2+2y_2^2=1$.又设 $\overrightarrow{AP}=\lambda_1\overrightarrow{PC},\overrightarrow{BP}=\lambda m2\overrightarrow{PD}$,其中 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}$,则 $\begin{cases}x_3=\dfrac{(\lambda_1+1)x_0-x_1}{\lambda_1},\\ y_3=\dfrac{(\lambda_1+1)y_0-y_1}{\lambda_1},\end{cases}$ 代入椭圆 $x^2+2y^2=1$ 并整理得 $(\lambda_1+1)^2(x_0^2+2y_0^2)+(x_1^2+2y_1^2)-2(\lambda_1+1)(x_0x_1+2y_0y_1)=\lambda_1^2$,从而有 $(\lambda_1+1)(x_0^2+2y_0^2)-2(x_0x_1+2y_0y_1)=\lambda_1-1$. ①

同理可得,$(\lambda_2+1)(x_0^2+2y_0^2)-2(x_0x_2+2y_0y_2)=\lambda_2-1$. ②

结合 $x_0=-4t,y_0=t,A,B$ 两点均在直线 $y=2x$ 上.由 ①－②,得 $(\lambda_1-\lambda_2)(x_0^2+2y_0^2-1)=0$,因为 $x_0^2+2y_0^2<1$,所以 $\lambda_1=\lambda_2$.从而 $AB\parallel CD$,故 CD 的斜率为定值.

4.2　妙用极限思想,优化解题过程

例 4　已知抛物线 $C:y^2=8x$,在 x 轴的正半轴上,是否存在某个确定的点 M,过该点的动直线 l 与抛物线 C 交于 A,B 两点,使得 $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BM^2}$ 为定值?如果存在,求出点 M 的坐标;如果不存在,请说明理由.

解析　假设存在满足条件的点 $M(m,0)(m>0)$,设直线 $l:x=ty+m$,与抛物线方程联立,有 $\begin{cases}x=ty+m,\\ y^2=8x,\end{cases}$ $y^2-8ty-8m=0$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,有 $y_1+y_2=8t,y_1y_2=-8m$.

$\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{(t^2+1)y_1^2}+\frac{1}{(t^2+1)y_2^2}=\frac{1}{t^2+1}\cdot\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{y_1^2y_2^2}\right)=\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{4t^2+m}{4m^2}$.当 $m=4$ 时,$\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BM^2}$ 为定值,所以 $M(4,0)$.

点评　假设存在点 M 满足条件,因为过点 M 的任意一条弦 AB,$\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BM^2}$ 为定值,那么对于垂直于 x 轴的弦 AB 也满足.当直线 AB 垂直于 x 轴时,设 $M(x_0,0),A(x_0,y_0),B(x_0,-y_0)$,则 $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{y_0^2}+\frac{1}{y_0^2}=\frac{2}{y_0^2}=\frac{1}{4x_0}$.对于这一特殊位置,还不能确定定点和定值,不妨考虑另一个极限位置.当点 A 无限接近原点 O 时,点 B 沿 x 轴无限延伸,横坐标趋向于 $+\infty$,$\frac{1}{BM^2}$ 趋向于 0,$\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BM^2}$ 趋向于 $\frac{1}{x_0^2}$.令 $\frac{1}{x_0^2}=\frac{1}{4x_0}$ 可得 $x_0=4$,故预判出定点为 $(4,0)$,那么后续只需证明点过的任一弦 AB 均有 $\frac{1}{AM^2}+\frac{1}{BM^2}=\frac{1}{16}$.提前预判出定点和定值,那么解题过程中就不需要设 2 个参量,只需引入直线的斜率这一个参量即可,这就大大简化了计算,优化了解题过程,这对于计算能力薄弱的学生是非常必要的.

在上述例题中，动直线的极限状态往往是切线或过已知点状态，若动直线过定点，则极限状态也过定点，所以两种极限状态下同时满足的定点通常可以预判，这样也给我们后面的解答指引了目标，即便用常规方式计算也会因此由漫无目的变得有的放矢.例如双二次的因式分解因为定点已知，从而分解更加容易.

4.3 活用极限思想，提升核心素养

面对新高考，我们总在强调“思维能力的培养”，这不仅是一句口号，而是需要一线教师在教学过程中不断摸索的.过去，我们在课堂中常会帮助学生总结解决问题的一般方法并归纳分类，这对于应试是能起到一定作用的，但题目是千变万化的，如何能让学生在面对各种问题时，自我分析，自我探究，自我解决，是需要教师不断引导的.

虽说极限思想不能直接用来求解圆锥曲线综合题，但是对于引导学生学会自我探究起到了积极的作用.上述例题中，利用极限思想来解决的过程，均是抓住了题目中的动点和动直线，寻找变化规律，这对于学生来说，是提升理性思维、抽象能力的绝佳时机.解题教学时，唯有多想一点，才能少算一点，多反思才能不断优化解题过程，多总结归纳才能以不变应万变，多复盘才能不断提升.

数学教育的本质是传授数学思想，教学生学会思考.极限思想在高中数学中的运用，不仅能提升学生的解题能力，还能提升核心素养，让学生站在更高的角度去思考、理解问题，知其然并知其所以然，更为今后高等数学的学习奠定基础.

参考文献

[1] 章建跃.通过直观理解导数概念感悟极限思想 运用导数研究函数性质解决实际问题[J].数学通报，2021,60(10):7-12,66.

（上接第58页）

分析 本题第(2)问解答中可以将直线l的方程设为$y=kx-3$的原因除了直线过y轴上定点以外，更多是因为核心条件$|PM|+|PN|\leqslant 15$可以翻译成$|PM|+|PN|=|x_M+x_N|=\left|\frac{x_1}{y_1+2}+\frac{x_2}{y_2+2}\right|$，目标式子(终)转为关于$x$的韦达定理较为简洁，从而选择“正设”(始).

有些问题核心条件或结论的转化较为复杂，需要进行二次转化，形成新的目标式子，进而再选择设线方式.但无论是哪种类型，培养学生的目标意识，遵循“以终为始”的设线原则，进而发展用程序化的思想理解、表达问题的能力，才是数学运算素养的最终诉求.

3.3 设线方式教学的价值旨归

高三复习课的专题分类经常是题型导向，而“设线方式问题”是方法导向.《普通高中数学课程标准（实验）》中要求利用8课时左右时间专门讲《推理与证明》，内容要求结合学习过的实例讲解综合法、分析法等，体现证明数学命题的方法性[2].《普通高中数学课程标准（2017年版2020修订）》中删除了《推理与证明》，提倡将证明数学问题的方法以渗透的方式融合在平时教学内容中[3].“设线方式问题”的教学就是一个很好的载体.本专题中，在学生习得“以终为始”的设线原则的同时，教师通过带领学生分析题目关键条件（结论），以分析法的思路得到解题的起点，然后以综合法的步骤书写解题过程，将书写过程、思维过程与综合法、分析法对应，真正从“教题型”中解脱出来，进而走向“教方法”.这一过程也为发展数学运算素养提供了可行场域.

4 结语

在解题过程中目标意识是最为重要的.圆锥曲线中目标意识是“终”，设线方式是“始”.“以终为始”是解决这类目标导向很明确的问题的基本原则.长期以来，我们习惯于呈现解题方法，忽视了思维的过程.表现为教师在课堂里直接告诉学生诸如“抛物线开口向右选择反设、面积问题中水平宽为定值时选择反设”等总结好的套路，固化了学生的思维.在解题教学中遵循“以终为始”的基本原则，生成火热的思考，有助于帮助学生“知其然，知其所以然”，进而“知何由以知其所以然”.

参考文献

[1] 朱潇，李鸿昌.从数学运算素养的内涵，谈运算能力的培养[J].中学数学，2018(1):57-59.

[2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）[M].北京：人民教育出版社，2020:29-30.

[3] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准（实验）[M].北京：人民教育出版社，2003:13-14.