数学教学通讯
投稿邮箱:sxjk@vip.163.com

坐标系平移化齐次巧解圆锥曲线相交弦的斜率和(积)问题

朱 晨
四川省成都市铁路中学校 610036

[摘 要] 对于圆锥曲线相交弦斜率和(积)为定值问题,文章通过平移坐标系将任意相交弦化为交点是原点的类型,齐次化联立直线与圆锥曲线方程,建立方程的根与斜率的关系,并对问题中的各种情况分类讨论,探索出解决此问题的一般方法.

[关键词] 圆锥曲线定值定点问题;斜率和(积);平移化齐次

已知点$P(x_0,y_0)$为平面内一定点,直线l与圆锥曲线E相交于异于点P的两点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,当PA,PB所在直线斜率的和(积)为定值时,直线l过定点或其斜率为定值.

常规解法中,一方面,设直线l方程,与圆锥曲线E联立,得到关于x(或y)的一元二次方程,设而不求,利用韦达定理建立起A,B坐标与系数间的关系;另一方面由$k_{PA}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$,$k_{PB}=\frac{y_2-y_0}{x_2-x_0}$,$k_{PA}+k_{PB}$(或$k_{PA}k_{PB}$)为定值,得到$A$,$B$坐标间的等量关系. 再以$A$,$B$坐标为桥梁,建立起直线$l$方程的系数之间的等量关系,进而探求出直线$l$的斜率为定值或直线$l$过定点. 这是比较容易想到的方法,但实操起来,却会因为PA,PB所在直线的斜率和(积)的表达式复杂,结合韦达定理消元困难而无法探求到定值、定点的结论.

若点P为原点,则$k_{PA}=\frac{y_1}{x_1}$,$k_{PB}=\frac{y_2}{x_2}$,其和与积表达形式显然更简洁. 对于非原点的P,我们可以通过坐标系平移的办法,使其成为新坐标系中的原点. 平移不会改变直线的倾斜程度,因此有关PA,PB所在直线的斜率之和(积)的定值关系,在新坐标系中仍然成立.

下面以椭圆为例,对这一方法进行证明和应用.

引论:坐标轴的方向和单位长度不变,只改变原点的位置,这种坐标系的变换叫作坐标的平移. 设O'在原坐标系中的坐标为(x_0,y_0),平移原坐标系,得到以O'为原点的新坐标系$x'O'y'$,则设M在原坐标系中的坐标为$M(x,y)$,在新坐标系中的坐标为$M'(x',y')$,坐标平移公式如下:

$$\begin{cases}x'=x-x_0,\\y'=y-y_0,\end{cases}\text{即}\begin{cases}x=x'+x_0,\\y=y'+y_0,\end{cases}$$

相交弦的斜率和为定值问题

结论1:已知点$P(x_0,y_0)$为椭圆E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点,直线$l$与椭圆$E$相交于异于点$P$的$A$,$B$两点. 设$PA$与$PB$所在直线的斜率分别为$k_1$,$k_2$. 若$k_1+k_2=\lambda$,则直线$l$的斜率为定值或直线$l$过定点.

证明:作平移变换$\begin{cases}x'=x-x_0,\\y'=y-y_0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=x'+x_0,\\y=y'+y_0,\end{cases}$

则平移后的椭圆E':$\frac{(x'+x_0)^2}{a^2}+\frac{(y'+y_0)^2}{b^2}=1(a>b>0)$,

整理得$b^2(x')^2+a^2(y')^2+2(x_0b^2x'+y_0a^2y')+x_0^2b^2+y_0^2a^2-a^2b^2=0.$

因为$P(x_0,y_0)$为椭圆上一点,满足$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$,代入上式得

$$b^2(x')^2+a^2(y')^2+2(x_0b^2x'+y_0a^2y')=0. \quad ①$$

因为l不经过P,则直线平移后一定不过原点,

则可将平移后的直线方程设为l':$mx'+ny'=1$,巧代"1",与①式齐次联立得

作者简介:朱晨(1990—),硕士研究生,中学一级教师,从事高中数学教学与解题研究工作,执教的课例《圆锥曲线的光学性质及其应用》在2019年度"一师一优课、一课一名师"活动中获评教育部年度优课.

$b^2(x')^2+a^2(y')^2+2(x_0b^2x'+y_0a^2y')\cdot(mx'+ny')=0.$ ②

因为k_1,k_2存在,且$P(x_0,y_0)$平移后变为$O'(0,0)$,则与点P相异的点A,B平移变换后得到点A',B',其横坐标必不为0,则在等式②两边可同除$(x')^2$,得

$$a^2(1+2ny_0)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+2(ma^2y_0+nb^2x_0)\cdot\left(\frac{y'}{x'}\right)+b^2(1+2mx_0)=0,$$

其中$k_{O'A'},k_{O'B'}$为关于$\frac{y'}{x'}$的一元二次方程式的两个根.

又因为平移变换不改变直线的斜率,所以$k_{O'A'}+k_{O'B'}=k_1+k_2=\lambda$,

则由韦达定理得$-\frac{2(ma^2y_0+nb^2x_0)}{a^2(1+2ny_0)}=\lambda$.

(1)若$\lambda=0$,

①$y_0=0$时,则$nb^2x_0=0$.

又$b^2x_0\neq0$,则$n=0$.

代入$l':mx'+ny'=1$即为$mx'=1$,直线$A'B'$斜率不存在,则直线l斜率不存在.

②$y_0\neq0$时,$m=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}n$.

则$k_{A'B'}=-\frac{m}{n}=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}=k_{AB}$,直线$l$的斜率为定值.

(2)若$\lambda\neq0$,$-2a^2y_0m=\lambda a^2(1+2ny_0)+2nb^2x_0$,代入$l':mx'+ny'=1$,消去$m$得

$[(2\lambda a^2y_0+2b^2x_0)x'-2a^2y_0y']n+\lambda a^2x'+2a^2y_0=0$.

由$\begin{cases}(2\lambda a^2y_0+2b^2x_0)x'-2a^2y_0y'=0,\\ \lambda a^2x'+2a^2y_0=0,\end{cases}$得

$$\begin{cases}x'=-\frac{2}{\lambda}y_0,\\ y'=-\frac{2b^2}{\lambda a^2}x_0-2y_0,\end{cases}$$

则$$\begin{cases}x=x'+x_0=\left(-\frac{2}{\lambda}y_0\right)+x_0=\frac{\lambda x_0-2y_0}{\lambda},\\ y=y'+y_0=\left(-\frac{2b^2}{\lambda a^2}x_0-2y_0\right)+y_0=\frac{-2b^2x_0-\lambda a^2y_0}{\lambda a^2},\end{cases}$$

即l过定点$\left(\frac{\lambda x_0-2y_0}{\lambda},\frac{-2b^2x_0-\lambda a^2y_0}{\lambda a^2}\right)$.

反过来,当$\lambda\neq0$时,l过定点$\left(\frac{\lambda x_0-2y_0}{\lambda},\frac{-2b^2x_0-\lambda a^2y_0}{\lambda a^2}\right)$,

则平移后$l':mx'+ny'=1$过定点$\left(\frac{-2y_0}{\lambda},\frac{-2b^2x_0-2\lambda a^2y_0}{\lambda a^2}\right)$,

则$m\left(\frac{-2y_0}{\lambda}\right)+n\left(\frac{-2b^2x_0-2\lambda a^2y_0}{\lambda a^2}\right)=1$,

整理得$-2a^2y_0m=\lambda a^2(1+2ny_0)+2nb^2x_0$,

则$k_{O'A'}+k_{O'B'}=-\frac{2(ma^2y_0+nb^2x_0)}{a^2(1+2ny_0)}=\lambda=k_1+k_2$.

综上所述,已知点$P(x_0,y_0)$为椭圆$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点,直线$l$与椭圆$E$相交于异于点$P$的$A,B$两点. 设$PA$与$PB$所在直线的斜率分别为$k_1,k_2$. 若$k_1+k_2=\lambda$,则当$\lambda=0$时,则直线$l$的斜率为定值;当$\lambda\neq0$时,其充要条件是直线$l$过定点.

例1:已知点$P(1,2)$为椭圆$E:\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{8}=1$上一点,直线$l$与椭圆$E$相交于异于点$P$的$A,B$两点. 设$PA$与$PB$所在直线的斜率分别为$k_1,k_2$,若$k_1+k_2=\lambda$,

(1)当$\lambda=0$时,求证:直线l的斜率为定值,并求出定值;

(2)当$\lambda=-1$时,求证:直线l过定点,并求出定点坐标.

证明:由于$P(1,2)$,所以作平移变换$\begin{cases}x'=x-1,\\ y'=y-2,\end{cases}$即$\begin{cases}x=x'+1,\\ y=y'+2,\end{cases}$

则平移后的椭圆$E':\frac{(x'+1)^2}{2}+\frac{(y'+2)^2}{8}=1$,

整理得$4(x')^2+(y')^2+(8x'+4y')=0$.

将平移后的直线方程设为$l':mx'+ny'=1$,巧代"1",与上式齐次联立得$4(x')^2+(y')^2+(8x'+4y')(mx'+ny')=0$,

即$(1+4n)(y')^2+(4m+8n)x'y'+(4+8m)(x')^2=0$,

等式两边同除$(x')^2$,得

$$(1+4n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+(4m+8n)\left(\frac{y'}{x'}\right)+(4+8m)=0.$$

$k_{O'A'},k_{O'B'}$为以上关于$\frac{y'}{x'}$的一元二次方程式的两个根,

所以$k_{O'A'}+k_{O'B'}=k_1+k_2=\lambda=-\frac{4m+8n}{1+4n}$.

(1)当$\lambda=0$时,解得$m=-2n$,则$k_{A'B'}=-\frac{m}{n}=2=k_{AB}$,直线$l$的斜率为定值2.

(2)当$\lambda=-1$时,$4m+8n=1+4n$,解得$m=\frac{1}{4}-n$,代入$l':mx'+ny'=1$,得$\left(\frac{1}{4}-n\right)x'+ny'=1$,即$(y'-x')n+\frac{1}{4}x'-1=0$.

由$\begin{cases}y'-x'=0,\\ \frac{1}{4}x'-1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x'=4,\\ y'=4,\end{cases}$

则$\begin{cases}x=x'+1=5,\\ y=y'+2=6,\end{cases}$即$l$过定点$(5,6)$.

例2:若在平面直角坐标系中,$A(2,1)$,$B(3,0)$,过点B的直线l与椭圆$E:\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$相交于$D,E$两点,设直线$AD,AE$的斜率分别为$k_1,k_2$,求证:$k_1+k_2$为定值.

证明:因为$A(2,1)$,所以作平移变换$\begin{cases}x'=x-2,\\ y'=y-1,\end{cases}$即$\begin{cases}x=x'+2,\\ y=y'+1,\end{cases}$

则平移后的椭圆$E':\frac{(x'+2)^2}{6}+\frac{(y'+1)^2}{3}=1$,即$(x')^2+2(y')^2+(4x'+4y')=0$.

将平移后的直线方程设为$l':mx'+ny'=1$,巧代"1",与上式齐次联立得

化简得$(2+4n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+(4m+4n)\cdot\left(\frac{y'}{x'}\right)+(1+4m)=0$.

$k_{A'D'},k_{A'E'}$为以上关于$\frac{y'}{x'}$的一元二次方程式的两个根,

所以$k_{A'D'}+k_{A'E'}=k_1+k_2=-\frac{2m+2n}{1+2n}$.

因为l过$B(3,0)$,则$l':mx'+ny'=1$过$B'(3-2,0-1)$,即$B'(1,-1)$代入l',

得$m+(-n)=1$,$m=n+1$.

$k_1+k_2=-\frac{2m+2n}{1+2n}=-\frac{2(n+1)+2n}{1+2n}=-2$为定值.

相交弦的斜率积为定值问题

结论2:已知点$P(x_0,y_0)$为椭圆E:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点，直线$l$与椭圆$E$相交于异于点$P$的$A$，$B$两点. 设$PA$与$PB$所在直线的斜率分别为$k_1$，$k_2$，若$k_1k_2=\mu$，则直线$l$的斜率为定值或直线$l$过定点.

证明：同结论1得到以下方程

$$a^2(1+2ny_0)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+2(ma^2y_0+nb^2x_0)\cdot\left(\frac{y'}{x'}\right)+b^2(1+2mx_0)=0,$$

则由韦达定理得$k_{O'A'}k_{O'B'}=k_1k_2=\frac{b^2(1+2mx_0)}{a^2(1+2ny_0)}=\mu$.

（1）若$\mu=\frac{b^2}{a^2}$，化简得$mx_0=ny_0$.

$x_0=0$时，P为上下顶点，因而$y_0\neq0$，则$n=0$，此时l与l'斜率均不存在；$x_0\neq0$时，$m=\frac{y_0}{x_0}n$，此时l与l'斜率$k=-\frac{m}{n}=-\frac{y_0}{x_0}$.

（2）若$\mu\neq\frac{b^2}{a^2}$，将$2b^2x_0m=a^2(1+2ny_0)\mu-b^2$代入直线$l'$：$mx'+ny'=1$，

化简得$(2\mu a^2y_0x'+2b^2x_0y')n+(\mu a^2-b^2)x'-2b^2x_0=0$.

由$\begin{cases}2\mu a^2y_0x'+2b^2x_0y'=0,\\(\mu a^2-b^2)x'-2b^2x_0=0,\end{cases}$

得$\begin{cases}x'=\dfrac{2b^2x_0}{\mu a^2-b^2},\\y'=-\dfrac{2\mu a^2y_0}{\mu a^2-b^2},\end{cases}$

则$\begin{cases}x=x'+x_0=\dfrac{2b^2x_0}{\mu a^2-b^2}+x_0=\dfrac{(\mu a^2+b^2)x_0}{\mu a^2-b^2},\\y=y'+y_0=-\dfrac{2\mu a^2y_0}{\mu a^2-b^2}+y_0=-\dfrac{(\mu a^2+b^2)y_0}{\mu a^2-b^2},\end{cases}$

则直线l恒过定点$\left(\frac{(\mu a^2+b^2)x_0}{\mu a^2-b^2},-\frac{(\mu a^2+b^2)y_0}{\mu a^2-b^2}\right)$.

反过来，若直线l恒过定点$\left(\frac{(\mu a^2+b^2)x_0}{\mu a^2-b^2},-\frac{(\mu a^2+b^2)y_0}{\mu a^2-b^2}\right)$，

则直线l'恒过定点$\left(\frac{2b^2x_0}{\mu a^2-b^2},-\frac{2\mu a^2y_0}{\mu a^2-b^2}\right)$，

则$m\left(\frac{2b^2x_0}{\mu a^2-b^2}\right)+n\left(-\frac{2\mu a^2y_0}{\mu a^2-b^2}\right)=1$，

化简得$2b^2x_0m=a^2(1+2ny_0)\mu-b^2$.

由韦达定理得$k_{O'A'}k_{O'B'}=k_1k_2=\frac{b^2(1+2mx_0)}{a^2(1+2ny_0)}=\mu$.

综上所述，点$P(x_0,y_0)$为椭圆E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点，直线$l$与椭圆$E$相交于异于点$P$的$A$，$B$两点. 设$PA$与$PB$所在直线的斜率分别为$k_1$，$k_2$，$k_1k_2=\mu$，当$\mu=\frac{b^2}{a^2}$时，若$x_0=0$，$l$与$l'$斜率均不存在，若$x_0\neq0$，$l$与$l'$斜率$k=-\frac{y_0}{x_0}$；当$\mu\neq\frac{b^2}{a^2}$时，其充要条件是直线$l$过定点.

例3：已知椭圆E：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，设椭圆E与y轴的正半轴交于点D，直线l与椭圆E交于A，B两点（l不经过点D）. 若$AD\perp BD$，求证：直线l经过定点，并求出定点的坐标.

解：由题可知$D(0,1)$，因为$AD\perp BD$，l不经过点D，所以AD，BD斜率存在且$k_{AD}k_{BD}=-1$.

作平移变换$\begin{cases}x'=x-0,\\y'=y-1,\end{cases}$

则平移后的椭圆E'：$\frac{(x')^2}{4}+(y'+1)^2=1$，整理得$(x')^2+4(y')^2+8y'=0$.

将平移后的直线方程设为l'：$mx'+ny'=1$，巧代"1"，与上式齐次联立化简得

$$(4+8n)\left(\frac{y'}{x'}\right)^2+8m\left(\frac{y'}{x'}\right)+1=0.$$

由韦达定理得$k_{O'A'}k_{O'B'}=\frac{1}{4+8n}=-1$，解得$n=-\frac{5}{8}$.

代入l'：$mx'+ny'=1$，消去n得$mx'-\frac{5}{8}y'=1$，

则l'过定点$\left(0,-\frac{8}{5}\right)$，$l$过定点$\left(0,-\frac{3}{5}\right)$.

以上例题，若用一般解法，联立直线与椭圆方程，得到关于x的一元二次方程，将斜率用点的坐标表示，再结合韦达定理进行求解，其中斜率的表达式比较复杂，计算量也较大，令许多学生望而却步. 而这里首先使坐标系进行平移变换，将斜率k转化为与坐标原点间的斜率$k'=\frac{y'}{x'}$，斜率的表达式得到了简化；接着巧设平移后的直线，巧用"1"的代换，齐次联立直线与椭圆的方程，得到一个关于$k'=\frac{y'}{x'}$的一元二次方程. 由于平移后斜率不变，故原本的斜率k即为此方程的两个根，使其斜率之和（积）的问题转化一元二次方程的根的问题，应用韦达定理便能使问题轻松解决，大大降低了计算量.

此外当点$P(x_0,y_0)$不在椭圆上时，仍可作平移变换$\begin{cases}x'=x-x_0,\\y'=y-y_0,\end{cases}$即$\begin{cases}x=x'+x_0,\\y=y'+y_0,\end{cases}$

则平移后的椭圆整理得

$$b^2(x')^2+a^2(y')^2+2(x_0b^2x'+y_0a^2y')+x_0^2b^2+y_0^2a^2-a^2b^2=0.$$

因为$P(x_0,y_0)$不在椭圆上，则$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\neq1$，即$x_0^2b^2+y_0^2a^2-a^2b^2\neq0$，

仍可将平移后的直线方程设为l'：$mx'+ny'=1$，巧代"1"，与上式齐次联立得$b^2(x')^2+a^2(y')^2+2(x_0b^2x'+y_0a^2y')\cdot(mx'+ny')+(x_0^2b^2+y_0^2a^2-a^2b^2)(mx'+ny')^2=0$，则等式两边同除$(x')^2$，仍然可得到一个关于$\frac{y'}{x'}$的一元二次方程，结合韦达定理，同样可以解决有关相交弦的斜率和（积）的问题. 进一步的，对于双曲线与抛物线中有关相交弦的斜率和（积）的问题，都可以通过平移齐次化，将其转化为一个关于$\frac{y'}{x'}$的一元二次方程来处理. 也就是说，对于此类问题学生是完全可以触类旁通的.

结束语

直线与圆锥曲线的问题往往因为复杂的表达形式和繁重的计算量让学生容易产生畏难情绪. 以上通过挖掘平移变换法、齐次化简，灵活巧算的技巧和方法，可以大大简化表达形式，降低计算量. 在日常教学中，教师要有意识地引导学生学会探索、归纳、总结圆锥曲线中的一些典型问题，以不变应万变，切实提高学生的解题能力与信心.