

高中数学圆锥曲线定点问题解题策略

叶伟飞

摘要:圆锥曲线的定值定点问题作为近些年高考的热点话题之一,该类题型在具体解题前通常无法确定定值、定点的计算结果,这就会对解题造成一定难度。在对该类问题进行解决时,需在点的“变”中找到定值的“不变”,通常会运用特殊的探索法,对定值、定点进行确定,然后转化成有目标、有方向的常规性证明题,以实现问题的解决。本文主要对高中数学的圆锥曲线中的定值、定点问题的解题策略进行探究。

关键词:高中数学;圆锥曲线;定点;解题策略

新课标中,首次提出专属数学学科的核心素养,其具体包括数学抽象、数学建模、逻辑推理、直观想象、数学运算与数据分析。同时,新课标中的课程教学目标也出现了相应的变化,并从“双基”转变成“四能”与“四基”,从注重学生学习数学的能力提升转变成注重学科素养的有效培养。而圆锥曲线当中的定点、定值问题作为高考考查的热点,其主要指某些图形面积、几何量线段长度、直线斜率、角的度数等大小或代数表达式的数值等与试题当中的相关参数无关,不会因为参数的变化而发生变化,而是个确定值。该类型的试题主要是解答题,其解决的思路主要是从量变过程寻求不变,也就是先通过变量表示出要求的点或量的坐标,并进行推理计算,导出的点或量的坐标与其变量无关。

一、直线过定点问题

直线过定点的问题,其主要指直线 $y=kx+b$,若 b 是常数,则存在直线会过定点 $(0,b)$;若 b/k 是常量,那么直线会过定点 $(-b/k,0)$ 。其常用的解题思路为:通过特殊值获得定点,注意对定点与变量之间没有关系进行证明,并对式子实施变形整理,通过计算与推理,实现变量消除的结果,以求得定点。对于直线过定点而言,较为常用的就是通过直线点斜式的方程进行证明。

例1:椭圆 C 方程是: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>b>0)$,其中点

$P_1(1,1), P_2(0,1), P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}), P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 当中的三点都在椭圆 C 上。

(1) 求取椭圆 C 方程;

(2) 假设直线 l 不过点 P_2 ,且和 C 相交在 A, B 两点,如果直线 P_2A 和直线 P_2B 斜率之和为 -1 ,则证明 l 过定点。

解:(1) 依据椭圆具有对称性可知, $P_1(1,1)$ 与 $P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 两点不能同时位于椭圆上,而 $P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

$P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 两点一定都在椭圆上,由此可知,在椭圆上的

的三点为 $P_2(0,1), P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2}), P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$,将其代入

到方程 C 中,可知: $b=1, \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow a=2$ 。

因此,椭圆 C 的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 。

(2) 设直线 P_2A 与 P_2B 的斜率分别是 k_1, k_2 ,如果 l 和 x 轴垂直,设 $l=t$,根据题设可知 $t \neq 0$,同时 $|t| < 2$,

由此可得 A, B 的坐标为 $(t, \frac{\sqrt{4-t^2}}{2}) (t, -\frac{\sqrt{4-t^2}}{2})$,则

$k_1+k_2 = \frac{\sqrt{4-t^2}-2}{2t} - \frac{\sqrt{4-t^2}+2}{2t} = -1$,可得 $t=2$,不满足题

设。因此,设 $l: y=kx+m (m \neq 1)$ 。将 $y=kx+m$ 代入到 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 中可得: $(4k^2+1)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$,根据题设可知 $\Delta = 16(4k^2 - m^2 + 1) > 0$ 。

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 那么 $x_1+x_2 = -\frac{8km}{4k^2+1}, x_1x_2 = \frac{4m^2-4}{4k^2+1}$ 。

同时, $k_1+k_2 = (y_1-1)/x_1 + (y_2-1)/x_2 = (kx_1+m-1)/x_1 + (kx_2+m-1)/x_2 = 2kx_1x_2 + (m-1)(x_1+x_2)/x_1x_2$

根据题设可知 $k_1+k_2 = -1$,因此, $(2k+1)x_1x_2 + (m-1)(x_1+x_2) = 0$ 。

即 $(2k+1) \cdot \frac{4m^2-4}{4k^2+1} + (m-1) \cdot \frac{-8km}{4k^2+1} = 0$

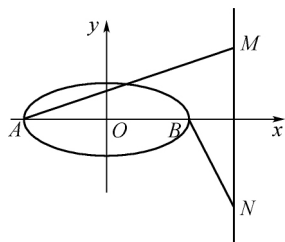
解得: $k = -(m+1)/2$ 。当且仅当 $m > -1$ 的时候, $\Delta > 0$,即 $l: y = -(m+1)/2x + m$,而 $y+1 = -(m+1)/2(x-2)$,由此可知,直线 l 恒过定点 $(2, -1)$ 。

二、动圆过定点问题

圆锥曲线当中的定点问题一般和圆锥曲线当中的“常数”有直接关系,例如椭圆双半轴的长、焦点坐标、双曲线的实虚轴长等,都可以通过直接计算获得,

也可通过“曲线系法”“特殊位置法”进行求解。动圆过定点的问题,如果没给出方程,求解的时候,就需对变化量实施正确的表述,也可通过引进参数,如点坐标、直线斜率、直线截距等对变化量进行表述,然后按照题目设条件,列出相应的关系式,对相应动态的曲线方程进行表示,并将曲线方程转化为 $f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$, 即 $\lambda \in \mathbb{R}$ 的时候, 曲线恒过定点为 $f(x, y) = 0$ 和 $g(x, y) = 0$ 两条直线的交点。

例2: 如图可知, 椭圆 C 方程是: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其左右两个顶点分别是 A, B , 右准线上有两个动点为 M, N , 同时, 向量 $\overrightarrow{AM}$ 与向量 $\overrightarrow{BN}$ 的乘积为 0, 那么以 MN 作为直径的圆能否会过定点, 如果是, 请求取定点坐标; 如果不是, 请说出理由。



解: 由题设可知 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 其右准线的方程是 $x=4$ 。

设 $M(4, m), N(4, n)$, 则 $\overrightarrow{AM} = (6, m), \overrightarrow{BN} = (2, n)$ 。

由 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$ 可得 $6 \times 2 + mn = 0$, 那么 $mn = -12$ 。

将 MN 作为直径的圆的方程则是: $(x-4)(x-4) + (y-m)(y-n) = 0$

即 $(x-4)^2 + y^2 - (m+n)y + mn = 0$, 由此可得: $(x-4)^2 + y^2 - (m+n)y - 12 = 0$

若 $y=0$, 则 $(x-4)^2 - 12 = 0$, 即 $x = 4 \pm 2\sqrt{3}$

因此, 将 MN 作为直径的圆过的定点为 $(4 \pm 2\sqrt{3}, 0)$ 。

由上可知, 在对该类型的试题进行解决时, 需注意 M, N 为右准线上的两个动点, 且注重 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$ 的有效利用。动圆是 M, N 所引起的, 因此, 通过 M, N 的坐标对“动因的量”进行表示, 由于其涉及两个参数, 就会联想到两个参数之间的关系。

三、求定值问题

定值问题通常是于运动变化过程中找出不变量问题, 其基本思想就是通过参数对需要解决的问题进行表示, 并证明需解决的问题和参数没有关系。该类试题当中, 最关键的就是消元的选择方向。对定值有关问题进行解决的时候, 通常包含两种思路, 即 (1) 根据符合题意的状况找出特殊状况, 并计算出需求取的值。之后, 在知道最后的答案的状况下, 对所求值和标量之间无关进行证明。例如, 在对三角形面积进行计算时, 通常是在符合题意的状况下, 假设三

角形是直角三角形等类似的特殊三角形, 对其面积进行计算, 然后再进行面积的计算。(2) 直接根据题意, 对条件进行转化, 并计算出求取的值, 最后通过化简变形, 设求取的值和变量没有关系。

例3: 已知曲线 C 方程是: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, A 是曲线 C

上的一个点, 其坐标是 $(1, 3/2)$, E, F 为曲线 C 的动点, 若存有 $K_{EF} + K_{AE} = 0$, 求证: EF 斜率是个常数, 且求出该常数的实际值。

解: 设直线 AE 方程是: $y = k(x-1) + \frac{3}{2} (k \neq 0)$,

由 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 与 $y = k(x-1) + \frac{3}{2}$ 相联立, 消去 y 后

可得:

$(4k^2+3)x^2 + (12k-8k^2)x + 4(\frac{3}{2}-k)^2 - 12 = 0$, 则可

知 $x_E = \frac{4(\frac{3}{2}-k)^2 - 12}{(4k^2+3)x_A} = \frac{4k^2-12k-3}{4k^2+3}$ ①

将式①当中的 k 替换成 $-k$, 可得: $x_F = \frac{4k^2+12k-3}{4k^2+3}$

②

因此, $k_{EF} = (y_F - y_E) / (x_F - x_E) = -k(x_F + x_E) + 2k / (x_F - x_E)$

将式①, ②代入到 $k_{EF} = (y_F - y_E) / (x_F - x_E) = -k(x_F + x_E) + 2k / (x_F - x_E)$ 当中, 可得 $k_{EF} = 1/2$, 因此, EF 斜率是个常数。定值问题主要是在运动与变化过程中找出不变量, 其基本思路主要是运用参数对需要解决的问题进行表示, 并证明需解决的问题和参数毫无关系。

四、结语

综上所述, 对定点、定值问题进行解决的方式需通过对特殊值、极端位置进行考查, 探索出具体“定值”, 然后再开展一般性的计算或者证明; 另外的方法则是将问题所涉及的几何式转变成三角形式或者代数式, 并对该式为恒定的进行证明。如果类似的试题是通过客观题的形式呈现, 通常更适用于特殊的方法进行解决。

参考文献:

- [1] 秦宜菊, 杨会. 有关圆锥曲线一类定值及定点问题的再研究 [J]. 中学数学教学参考, 2019(16): 52-53.
- [2] 孟弦. 圆锥曲线中一类定点问题的探究 [J]. 中学数学研究(华南师范大学版), 2019(9): 42-43.

作者简介:

叶伟飞, 浙江省临海市, 浙江省临海市大田中学。