# 浅谈直线与圆锥曲线相交问题

柳永红

(江苏省白蒲高级中学,226500)

摘要: 学生在学习解析几何的过程中经常会提出“涉及直线与椭圆相交时,将直线的方程与椭圆方程联立后,消去y得到关于x的方程,为何不需要考虑上述方程的解在区间[-a,a]上,只要用判别式进行限制就可以”这样的问题.本文通过证明,说明其中原因.

关键词: 直线; 圆锥曲线; 相交

## 一、提出问题

在解析几何中,学生经常会提出以下问题: 涉及直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交时,将直线 $l$ 的方程与椭圆 $C_1$ 方程联立后,消去 $y$ 得到关于 $x$ 的方程 $(b^2+a^2k^2)x^2+2kma^2x+a^2m^2-a^2b^2=0$,为何不需要考虑上述方程的解在区间 $[-a,a]$ 上,只要用判别式 $\Delta>0$ 进行限制就可以? 对于双曲线与抛物线,也有类似的问题.

对于这些问题,许多老师认为这些问题本该如此,没有给学生讲解的必要.但是,当学生遇到问题“求圆 $M:(x+1)^2+y^2=8$ 与抛物线 $C: y^2=4x$ 的交点”时,消去 $y$ 得关于 $x$ 的方程 $x^2+6x-7=0$,就需要考虑方程 $x^2+6x-7=0$ 的解在区间 $[0,2\sqrt{2}-1]$ 上.此时学生对上述问题就自然会产生出疑问.现将对上述问题分析证明过程展现如下.

## 二、分析问题

### 1.直线与椭圆相交

设直线 $l: y=kx+m$ 椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交,且有两个交点.将直线 $l$ 的方程与椭圆 $C_1$ 方程联立,消去 $y$ 得到关于 $x$ 的方程 $(b^2+a^2k^2)x^2+2kma^2x+a^2m^2-a^2b^2=0$①.则 $\Delta=(2kma^2)^2-4(b^2+a^2k^2)(a^2m^2-a^2b^2)>0$,即 $m^2-b^2-a^2k^2<0$.

令函数 $f(x)=(b^2+a^2k^2)x^2+2kma^2x+a^2m^2-a^2b^2$,其中 $m^2-b^2-a^2k^2<0$.从而 $f(-a)=(b^2+a^2k^2)(-a)^2-2kma^3+a^2m^2-a^2b^2=a^2(ak-m)^2\geqslant 0$, $f(a)=(b^2+a^2k^2)a^2+2kma^3+a^2m^2-a^2b^2=a^2(ak+m)^2\geqslant 0$,函数 $f(x)$ 图象的对称轴 $x=-\frac{kma^2}{b^2+a^2k^2}$.

$\because \left(-\frac{kma^2}{b^2+a^2k^2}\right)^2-a^2=\frac{k^2m^2a^4-a^2(b^2+a^2k^2)^2}{(b^2+a^2k^2)^2}<\frac{k^2a^4(b^2+a^2k^2)-a^2(b^2+a^2k^2)^2}{(b^2+a^2k^2)^2}=\frac{-a^2b^2(b^2+a^2k^2)}{(b^2+a^2k^2)^2}<0$,即 $\left(-\frac{kma^2}{b^2+a^2k^2}\right)^2<a^2$,也即 $-a<-\frac{kma^2}{b^2+a^2k^2}<a$ 从而对称轴 $x=-\frac{kma^2}{b^2+a^2k^2}\in(-a,a)$.而 $\Delta>0$ 即 $m^2-b^2-a^2k^2<0$,所以 $f\left(-\frac{kma^2}{b^2+a^2k^2}\right)<0$.又因为 $f(-a)\geqslant 0$,且函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续,所以函数 $f(x)$ 在区间 $\left[-a,-\frac{kma^2}{b^2+a^2k^2}\right)$ 上有且只有一个零点.同理可得函数 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{kma^2}{b^2+a^2k^2},a\right]$ 上有且只有一个零点.所以在 $\Delta>0$ 的条件下,方程①的解均在区间[-

$a, a]$ 上.

于是,直线 $l: y=kx+m$ 与椭圆 $C_1: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 相交时,将直线 $l$ 的方程与椭圆 $C_1$ 方程联立后,消去 $y$ 后所得方程①的解一定在区间 $[-a, a]$ 上,不需要考虑上述方程的解在区间 $[-a, a]$ 上,只要用判别式 $\Delta>0$ 进行限制就可以了.

2.直线与双曲线相交

设直线 $l: y=kx+m$,双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 且有两个不同交点时,将直线 $l$ 的方程与双曲线 $C_2$ 方程联立,消去 $y$ 得关于 $x$ 的方程 $(b^2-a^2k^2)x^2-2kma^2x-a^2m^2-a^2b^2=0$②. 于是由题设条件可得即 $\begin{cases}b^2-a^2k^2\neq 0,\\ m^2+b^2-a^2k^2>0.\end{cases}$ 令函数 $g(x)=(b^2-a^2k^2)x^2-2kma^2x-a^2m^2-a^2b^2$,其中 $\begin{cases}b^2-a^2k^2\neq 0,\\ m^2+b^2-a^2k^2>0.\end{cases}$ 则 $g(-a)=(b^2-a^2k^2)(-a)^2+2kma^3-a^2m^2-a^2b^2=-a^2(ak-m)^2\leqslant 0$,$g(a)=(b^2-a^2k^2)a^2-2kma^3-a^2m^2-a^2b^2=-a^2(ak+m)^2\leqslant 0$,且对称轴 $x=\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}$.

(1)当 $b^2-a^2k^2>0$ 时,$g(-a)=-a^2(ak-m)^2\leqslant 0$,$g(a)=-a^2(ak+m)^2\leqslant 0$,函数 $g(x)$ 开口向上且函数连续,于是函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, -a]$ 和 $[a, +\infty)$ 上各有一个零点;

(2)当 $b^2-a^2k^2<0$ 时,$\left(\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}\right)^2-a^2=\frac{k^2m^2a^4-a^2(b^2-a^2k^2)^2}{(b^2-a^2k^2)^2}>\frac{k^2a^4(a^2k^2-b^2)-a^2(b^2-a^2k^2)^2}{(b^2-a^2k^2)^2}=\frac{a^2b^2(a^2k^2-b^2)}{(b^2-a^2k^2)^2}>0$. 故 $\left(\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}\right)^2>a^2$ 即 $\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}>a$ 或 $\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}<-a$.

1° 当 $\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}>a$ 时,因为 $\begin{cases}b^2-a^2k^2<0\\ m^2+b^2-a^2k^2>0,\end{cases}$ 所以 $g\left(\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}\right)>0$. $g(a)=(b^2-a^2k^2)a^2-2kma^3-a^2m^2-a^2b^2=-a^2(ak+m)^2\leqslant 0$,函数 $g(x)$ 开口向下且函数连续,于是函数 $g(x)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上有两个不同的零点.

2° 当 $\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}<-a$ 时,因为 $\begin{cases}b^2-a^2k^2<0\\ m^2+b^2-a^2k^2>0,\end{cases}$ 所以 $g\left(\frac{kma^2}{b^2-a^2k^2}\right)>0$,$g(-a)=(b^2-a^2k^2)(-a)^2+2kma^3-a^2m^2-a^2b^2=-a^2(ak-m)^2\leqslant 0$,函数 $g(x)$ 开口向下且函数连续,于是函数 $g(x)$ 在区间 $(-\infty, -a]$ 上有两个不同的零点.

综上可得在条件 $b^2-a^2k^2\neq 0$ 与 $\Delta=(-2kma^2)^2-4(b^2-a^2k^2)\cdot(-a^2m^2-a^2b^2)>0$(即 $m^2+b^2-a^2k^2$)下,方程的解均在区间 $(-\infty, -a]\cup[a, +\infty)$ 上.于是,直线 $l: y=kx+m$ 与双曲线 $C_2: \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0, b>0)$ 有两个不同交点时,将直线 $l$ 的方程与双曲线 $C_2$ 方程联立消去 $y$ 所得方程②的解在区间 $(-\infty, -a]\cup[a, +\infty)$ 上,于是在 $b^2-a^2k^2\neq 0$ 时,不需要考虑上述方程的解在区间 $(-\infty, -a]\cup[a, +\infty)$ 上,只要用判别式 $\Delta>0$ 进行限制就可以了.

3.直线与抛物线相交

设直线 $l: y=kx+m$ 与抛物线 $C_3: y^2=2px(p>0)$ 有两个不同交点,将直线 $l$ 的方程与抛物线 $C_3$ 方程联立后,消去 $y$ 得关于 $x$ 的方程 $k^2x^2+(2km-2p)x+m^2=0$③,则 $k\neq 0$,且 $\Delta=(2km-2p)^2-4k^2m^2>0$,即 $k\neq 0$,且 $p-2km>0$.令函数 $h(x)=k^2x^2+(2km-2p)x+m^2$,则 $h(0)=m^2\geqslant 0$,对称轴 $x=\frac{p-km}{k^2}$.因为 $p-2km>0$,即 $-km>-\frac{p}{2}$,所以对称轴 $x=\frac{p-km}{k^2}>\frac{p}{2k^2}>0$.当 $k^2>0$ 时,因

(下转第34页)

能会有另一种效果.

爱因斯坦曾经说过 “发现问题比解决问题更重要”. 从以上的课堂实录中真真切切地感受到了这种体会. 由此发现整个新人教A版2019版高中数学课程在“探究与发现”这个版块中的螺旋式设问,恰到好处地点拨、启发,在学生发展核心素养大背景下尤其独树一帜,值得广大高中教师细细研究.

二、对于新人教A版“探究与发现”版块的使用建议

关注学生的问题意识培养,关注新增内容,发挥特色版块“探究与发现”的作用. 这就需要教师熟悉新教材,认真揣摩教材编写意图,在教学中注重学科核心素养的渗透,充分发挥“探究与发现”版块的作用. 还需要教师在对教材内容充分理解的基础上,科学、合理、灵活地发挥“探究与发现”这个版块的潜在价值和功能,提高教材应用能力,有效引导学生学习. 此外还要注意进行启发教学、激发思维、拓展探究,在教学“探究与发现”时做到适可而止,切不可越俎代庖.

落实学生发展核心素养不是一句空话. 应该合理利用好课堂的每一个细节,关注学生的思维碰撞,把学生发现问题、分析问题的核心素养落到实处. 例如在“为什么 $y=\pm\frac{b}{a}x$ 是双曲线的渐近线”教学中,让学生感受到从有限认识无限,从近似认识精确,从量变认识质变,体会“无限趋近”的本质. 知识是延续的,要引导学生继续保持探究精神,发挥自己的想象力与创造力,勇于发现,大胆猜想,合理论证.

在课堂教学中渗透核心素养,不仅仅是培养学生显性的数学学习能力,更是培养学生隐性的可持续发展的能力. 新人教A版2019版高中数学课程在“探究与发现”这个版块中很好地诠释了这个观点. 正如英国教育家怀特海所说的,“教育是教人们如何运用知识的艺术,当你丢掉你的课本,烧掉你的听课笔记,忘掉你为了应付考试而背诵的细节,你的学习对你来说才是有用的,你所需要的那些细节的知识就像头顶上的太阳和月亮一样,都是显而易见的事实; 而你偶尔需要的,都能在任何参考文献里找到答案”. 这样的教育,才能“把营养输送给人生.”

参考文献

[1] 刘新阳,裴新宁. 教育变革期的政策机遇与挑战——欧盟“核心素养”的实施与评价[J]. 全球教育展望,2014.

[2] 吴亮奎. 我国教师的教材素养及其面临的时代要求[J]. 当代教育与文化,2018(7).

[3] [英]怀特海著; 庄莲平,王立中译. 教学的目的[M]. 上海: 文汇出版社,2012.

[4] 史宁中. 学科核心素养的培养与教学——以数学学科核心素养的培养为例[J]. 中小学管理,2017(1).

[5] 周文叶,陈铭洲. 指向核心素养的表现性评价[J]. 课程教材教法,2017(9).

(上接第36页)

为 $p-2km>0$,所以 $h(x)_{\min}=h\left(\frac{p-km}{k^2}\right)<0$. 又因为 $h(0)=m^2\geqslant 0$,且函数 $h(x)=k^2x^2+(2km-2p)x+m^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续,于是函数 $h(x)=k^2x^2+(2km-2p)x+m^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上有两个不同的零点. 所以在 $\begin{cases}k\neq 0,\\ \Delta=(2km-2p)^2-4k^2m^2>0\end{cases}$ 的条件下,方程③的解均在区间 $[0,+\infty)$ 上.

于是,直线 $l: y=kx+m$ 与抛物线 $C_3$: $y^2=2px(p>0)$ 有两个不同交点时,将直线 $l$ 的方程与抛物线 $C_3$ 方程联立后,消去 $y$ 得关于 $x$ 的方程③的解在区间 $[0,+\infty)$ 上,在 $k^2\neq 0$ 时,不需要考虑上述方程的解在区间 $[0,+\infty)$ 上,只要用判别式 $\Delta>0$ 进行限制就可以了.

参考文献

[1] 郑丽兵. 对一道题的多角度思考、探究、归纳和反思[J]. 数学通讯(下半月),2018(6).