

分类号:

密 级: 公开

学 号: 20202118001

单位代码: 10759

石河子大学

硕士学位论文



促进有意义学习的高中数学单元教学设计的 ——以《圆锥曲线的方程》为例

学 位 申 请 人	王奕今
指 导 教 师	谢红梅
申 请 学 位 类 别	教育硕士
专 业 名 称	学科教学 (数学)
研 究 领 域	学科教学 (数学)
所 在 学 院	理学院

中国·新疆·石河子

2022 年 6 月

**Research on High School Mathematics Unit Teaching Design to
Promote Meaningful Learning
——Take the Equation of Conic as an Example**

A Dissertation Submitted to

Shihezi University

In Partial Fulfillment of the Requirements

for the Degree of

Master of Education

By

Wang Yi-jin

(Education)

Dissertation Supervisor: Prof. Xie Hong-mei

June,2022

摘要

随着新课改的有效实施,学校课堂教学更加注重于培育学生的基本思维能力、关键品格和必备品质,强调以思维为核心、全身心参与、积极建构的有意义学习为培育、发展学生的核心素养提供了有效途径。而在整体性思想指导下的单元教学,能够使教师站在学科知识体系的高度对课时计划有“全局性展望”,促进学生建立新旧知识间的联系,把握数学核心知识,体会数学的本质和思想方法,形成积极的内在学习动机以及高级的社会性情感,促进学生实现有意义的数学学习。《圆锥曲线的方程》是高中数学平面解析几何的重点内容,开展针对《圆锥曲线的方程》一章的促进有意义学习的单元教学研究,是十分必要的。

本文通过文献分析法、问卷调查法等,通过查阅大量文献资料,探索有意义学习理论与单元教学之间的联系,尝试进行有效对接。以人教A版(人民教育出版社课程教材研究所,2019)普通高中教科书选择性必修一《圆锥曲线的方程》一章为例,依托教育实习平台,调查石河子市某高中在圆锥曲线部分目前的教学现状,并尝试结合有意义学习理论和单元教学的特征,设计能够促进有意义学习的圆锥曲线单元教学方案。

通过问卷调查发现,教师普遍认可单元教学方式,但对其掌握情况不够理想;学生学习圆锥曲线困难成因主要集中在“基本性质容易混淆”、“方法难,想不到”和“与其他知识联系多”。论文依照有意义学习理论与单元教学设计特征,重新整合教材课时顺序,设置了章首起始课及章末收尾课,给出了《圆锥曲线的方程》一章的单元教学设计。最后,提出了促进有意义学习的高中数学单元教学设计的相关策略,即构建先行组织者,由“学会知识”向“学会学习”转变策略;视角高站位,促进学生良好认知结构的发展策略;开展特色实践主题活动,激发学生有意义学习心向策略。

圆锥曲线章节采用单元教学设计能够很好地顺应学生的认知发展规律,引导学生发展批判性、发散性和创造性的高阶思维,培育学生数学核心素养,实现有意义学习,也能够为教师在圆锥曲线教学中实现促进有意义学习的单元教学提供思考与参考。

关键词: 有意义学习; 单元教学; 圆锥曲线

Abstract

With the effective implementation of the new curriculum reform, school classroom teaching pays more attention to cultivating students' basic thinking ability, key character and essential quality, and emphasizes meaningful learning with thinking as the core, wholeheartedly participating and actively constructing, which provides an effective way to cultivate and develop students' core literacy. The unit teaching under the guidance of the holistic thought can enable teachers to stand at the height of the subject knowledge system and have an "overall outlook" on the class hour plan, promote students to establish the relationship between old and new knowledge, grasp the core knowledge of mathematics, experience the essence and ideological methods of mathematics, form positive internal learning motivation and advanced social emotion, and promote students to realize meaningful mathematics learning. The equation of conic curve is the key content of plane analytic geometry in senior high school mathematics. It is very necessary to carry out unit teaching research to promote meaningful learning for the chapter of the equation of conic curve.

This thesis explores the relationship between meaningful learning theory and unit teaching through literature analysis, questionnaire survey and consulting a large number of literature. Taking the chapter "equation of conic curve", an optional compulsory course of ordinary high school textbooks in people's Education Edition A (Institute of curriculum and teaching materials of people's education press, 2019), as an example, relying on the educational practice platform, this thesis investigates the current teaching situation of conic curve in a high school in Shihezi City, and tries to design a conic curve unit teaching scheme that can promote meaningful learning in combination with the characteristics of meaningful learning theory and unit teaching. Through the questionnaire survey, it is found that teachers generally recognize the unit teaching method, but their mastery is not ideal; The causes of students' difficulties in learning conic curve mainly focus on "easy confusion of basic properties", "difficult methods, unexpected" and "many connections with other knowledge". According to the meaningful learning theory and the characteristics of unit teaching design, this thesis reconstructs the class order of teaching materials, sets up the beginning and end courses of the chapter, and gives the unit teaching design of the chapter "equation of conic". Finally, it puts forward some strategies to promote meaningful learning in senior high school mathematics unit teaching design, that is, to construct the advance organizer and change the strategy from "learning knowledge" to "learning to learn"; The development strategy of promoting students' good cognitive structure from a high perspective; Carry out characteristic practice theme activities to stimulate students' desire for meaningful learning strategies.

The use of unit teaching design in conic section can well comply with the law of students' cognitive development, guide students to develop critical, divergent and creative high-order thinking, cultivate students' mathematical core literacy and realize meaningful learning. It can also provide thinking and reference for teachers to realize unit teaching to promote meaningful learning in conic teaching.

Key words: Meaningful learning; Unit teaching; Conic curve

目录

摘要.....I

Abstract..... II

第 1 章 绪论..... 1

 1.1 研究背景与研究意义 1

 1.1.1 研究背景..... 1

 1.1.2 研究意义..... 2

 1.2 核心概念界定及理论基础 4

 1.2.1 核心概念界定..... 4

 1.2.2 理论基础..... 5

 1.3 国内外研究现状及述评 6

 1.3.1 研究现状..... 6

 1.3.2 研究述评..... 9

 1.4 研究内容与研究目的 10

 1.4.1 研究内容..... 10

 1.4.2 研究目的..... 10

 1.5 研究思路与方法 11

 1.5.1 研究思路..... 11

 1.5.2 研究方法..... 11

 1.6 研究的重难点与创新之处 11

第 2 章 相关问卷调查..... 13

 2.1 调查过程与内容 13

 2.1.1 调查对象..... 13

 2.1.2 调查分析工具..... 13

 2.1.3 调查问卷内容..... 14

 2.2 学生问卷数据收集与分析 14

 2.2.1 学生问卷数据的收集..... 14

 2.2.2 学生问卷数据的分析 14

 2.3 教师问卷数据收集与分析 18

 2.3.1 教师问卷数据的收集..... 18

2.3.2 教师问卷数据的分析	18
2.4 调查分析结论	22
第3章 促进有意义学习的高中数学单元教学设计思路	23
3.1 确定单元内容	23
3.2 分析教学要素	24
3.2.1 数学分析	24
3.2.2 课标分析	24
3.2.3 学情分析	25
3.2.4 教材分析	25
3.2.5 《圆锥曲线的方程》重难点分析	30
3.2.6 教学方式分析	31
3.3 编制《圆锥曲线的方程》单元教学目标	31
3.4 设计《圆锥曲线的方程》单元教学流程	31
3.4.1 章首起始课	32
3.4.2 具体圆锥曲线概念和性质教学	33
3.4.3 章末收尾课	33
第4章 《圆锥曲线的方程》单元教学设计	35
4.1 具体课时教学设计	35
4.1.1 章首起始课——初步了解圆锥曲线	35
4.1.2 椭圆及其标准方程	39
4.1.3 双曲线及其标准方程	43
4.1.4 椭圆的简单几何性质	48
4.1.5 双曲线的简单几何性质	52
4.1.6 抛物线及其标准方程	56
4.1.7 抛物线的简单几何性质	60
4.1.8 章末收尾课——圆锥曲线的统一定义	62
4.2 教学评价与反思	66
4.3 促进有意义学习的高中数学单元教学策略	66
4.3.1 构建先行组织者, 由“学会知识”向“学会学习”转变	66
4.3.2 视角高站位, 促进学生良好认知结构的发展	66
4.3.3 开展特色实践主题活动, 激发学生有意义学习心向	67
第5章 研究总结与展望	68
5.1 研究总结	68
5.2 不足与展望	68

5.2.1 不足..... 68

5.2.2 展望..... 69

参考文献..... 70

附录..... 73

致谢..... 76

第1章 绪论

1.1 研究背景与研究意义

1.1.1 研究背景

一、新时代教育发展对人才培养提出更高要求

随着现代科技的飞速发展,当今世界人口环境和经济需求等都逐渐呈现出文化多元融合和业态可持续发展的特点,体现了新时代对“未来人才”的急切呼唤。为满足新时代教育发展的要求,不同的机构组织都积极提出了具有本国特色的解决方案:我国强调学生应提高“核心素养”、美国提出培育学生“21 世纪的关键技能”、澳大利亚认为应当培养学生“综合能力”等等。这些核心素养和本质的本质,就是为了培养能够面向未来、具有批判性思维和实践创新能力的优秀人才,因此,只注重传授知识点的教学方式已经不能顺应时代的发展方向,课堂教学更应该着力发展学生思维,提升学生能力,培育其必备品格。

提高中小学学生核心素养的关键就是转变教师传统的教学观念和教学方法,摒弃过去教学中过度注重学生成绩、忽视培养学生能力的做法,调动学生的主观能动性,充分发挥学生的个性和创造性。与此同时,强调以思维为核心、全身心参与、积极建构的有意义学习为培育、发展学生的核心素养提供了有效途径。

二、机械学习的教学模式亟待改进

在此前很长一段时间内,我国的高中数学教学都局限于“课时主义”——把教学内容碎片化地当作知识点来处置^[1]。这样的教学方式忽视了知识形成的思维过程、夸大了教师的主导作用,导致学生形成死记硬背、机械模仿、不求甚解、唯师唯书的机械学习。从知识识记的角度看,以机械学习的方式获得的知识在学生头脑里没有与已经掌握的知识形成纵向联系,因此不易在头脑里长期保留;从知识迁移的角度看,以机械学习方式获得的知识之间没有形成横向联系,因此难以迁移运用。为了让学生由机械学习转变为有意义学习,教师要改变现有的课堂教育教学模式,在传授知识内容时引导学生的思维深入到知识的发现或再发现的过程中去。教学设计以促进学生的进步与发展为宗旨,沟通了教学理论与实践,科学合理的教学设计可以为学生创造“有意义的学习经历”^[2]。

为帮助学习者加强新旧知识点之间的联系,并学会迁移运用,发展思维能力,从而促进有意义学习,我们将目光转向了从整体性出发的单元教学设计。单元教学设计基于

整体性思维重新规划安排课时,思考这节课与以往的教学内容有怎样的联系,又如何使以后的课程在此基础上展开,打破“课时主义”的束缚,而非摒弃课时教学。相比于课时教学设计,单元教学设计让老师们有更充分的时间与空间,针对实际情况调控课堂节奏^[3]。教师站在学科系统的高度设计课堂教学,能够避免学生形成课时主义带来的碎片化的认知结构,避免学生一直停留于浅层的机械学习;将知识结构和学科的逻辑体系内化为学生的认知结构,帮助学生建立新旧知识间的联系,把握数学核心知识,体会数学的本质和思想方法,形成积极的内在学习动机,体会高级的社会性情感,促进学生达到有意义的数学学习。

解析几何是数学发展中的重要成果,其本质是通过坐标法将几何问题转化为代数问题,借助代数运算和逻辑推理,对这些数、代数式及方程之间的关系问题进行研究讨论,最后将结果转化成相应的几何结论。《圆锥曲线的方程》是普通高中数学解析几何板块的重要内容,同时也是高考的高频考点,学好圆锥曲线对培育学生直观想象、数学运算、逻辑推理、数学抽象、数学建模等核心素养,提升学生思维能力具有十分重要的意义。但圆锥曲线部分的内容同时具有“概念难以理解、内容联系广泛、问题解决方法复杂多样”等特点,如何发掘圆锥曲线的内在联系、感悟知识内容的本质、帮助学生由学习知识发展为培养数学思维能力、由机械学习转为有意义学习,成为了一线教师们的难题。

综上所述,为了适应新时代教育发展对人才培养的要求,尝试解决教师教学中过度关注知识传授而忽视发展学生能力素养的问题,本文将以石河子市某中学的学生和老师为研究对象,以2019人教A版普通高中数学教科书选择性必修一第三章《圆锥曲线的方程》为例设计一章单元教学设计,为该地区数学教师提供一些促进高中生有意义学习的单元教学设计参考。

1.1.2 研究意义

一、践行有意义学习的单元教学有利于提高和发展学生能力,培育学科素养

有意义学习,是学生原有认知框架同化、贮存新的学习材料,通过新旧知识互动进而使新知识获得意义的过程^[4]。奥苏贝尔认为,课堂教学所用材料具有逻辑内涵、学习者具备同化新知识的认知结构和联系新旧知识的心向是实现有意义学习的必要前提。因此在数学教学中,教师必须考虑学习材料内部要有逻辑性和系统性、新知识要能够对接学生原有的认知结构,才能保证学生在学到知识的同时还能理解知识的内在逻辑,使学生学到的不是孤立的知识点,而是系统的知识。选择实行单元教学就是因为其要以知识点的互相联系、完整性和学习者的参与度为基础,充分调动学习者的主体积极性,让学习者获得有意义学习。

2016年国家颁布了中国学生核心素养总体框架,并于2017年明确了具体学科的核心

心素养。数学核心素养难以体现在单一的知识点上,而是往往隐藏在知识结构之中,学生学习数学不仅为了学会数学知识,更为了能灵活运用数学思维思考、分析问题,用数学知识、技能解决问题,在数学学习的过程中培育数学核心素养,为以后的生活发展做准备。事实上,在高中数学教学中践行在整体性思维指导下的促进有意义学习的单元教学有利于摆脱“课时主义”的束缚,避免知识碎片化的问题,从而更好地揭示知识本质,提升学生思维能力,从更高视角规划培育学生核心素养。在践行促进有意义学习的单元教学中,教师以知识结构为明线、学科内在逻辑为暗线设计教学活动,以组织者、合作者和引导者的身份使学习者积极参与整个学习过程,学生在特定的教学情境中通过师生间相互作用内化知识,领会知识的本质,掌握并学会应用数学思想方法,逐步培养和提高数学思维能力、创新和应用能力等,培育数学核心素养。

二、实施单元教学有利于构建学生良好数学认知结构,实现有意义学习

2020年修订的新课标具体实施若干意见中提出老师“不仅关注每一节的教学目标,更要关注主题、单元的教学目标,明晰这些目标对实现数学学科核心素养发展的贡献”,还提出要“整体把握教学内容,促进数学学科核心素养连续性和阶段性发展”^[5]。数学单元教学设计正是为改变教师过分关注知识点的倾向,突出数学知识的脉络和知识间的相关性,合理地对相关概念进行重组和优化。它提倡教师不仅要关注知识技能的传授,更应思考知识本身所蕴含的深刻思想,以知识技能为载体实现学生核心素养的发展。单元教学并非不要课时教学,不同于以往只关注每堂课设计的好坏,单元教学站在学科知识体系的高度设计使课时与课时在教学目标和教学内容等方面具有逻辑性和联系性的课堂,以期能完整地呈现知识结构,帮助学生建立良好的认知结构。同时,有意义学习正是强调关注学生认知发展结构。虽然学生的认知结构和学科的知识结构是两个不同的概念,但它们之间有内在的、紧密的联系:认知结构不仅具有知识结构的客观性,而且具有个体对知识建构的主观性^[6]。刘斌认为,数学认知结构是学习者头脑中通过内化数学知识结构而形成概念的内容和组织^[7]。故,教师以数学思想方法为暗线,根据知识间的逻辑关系设计教学方案,有利于学生将新的学习材料合理纳入原有认知结构的适当位置,使学生在实践探索中积累活动经验,生成个人感悟,发展高阶思维能力,在合作交流中增强社会性,实现有意义学习。

综上所述,单元教学的开展有助于学生逐步同化新知识点,使之与固有的认知结构相互联系,以不断发展和完善良好数学认知结构;使学生对数学思想和方法有深刻的理解,学会用数学的眼睛看世界,灵活应用数学思想发现问题、解决问题,促进学生发展批判性、发散性和创造性的数学高阶思维,实现有意义学习。

1.2 核心概念界定及理论基础

1.2.1 核心概念界定

一、有意义学习

有意义学习是指符号或文字所代表的新知识和学生头脑中原有的认知结构建立起一种实质的和非人为的联系^[8]。符号所代表的新知识同学生原有知识之间的符合逻辑的联系称为非人为的联系；同一认知内容以不同语言或其他符号表达的联系称为实质的联系^[4]。

有意义学习理论强调学习者建立新旧知识间的联系，其核心是学习者认知结构中起固定作用的观念。新旧知识之间的联系是一个同化的过程，它不仅改变了新知识的意义，而且改变了旧的固定知识的意义，导致认知结构的分化程度更高。也就是说，如果新旧知识没有相互作用，就不能称为有意义学习。

二、数学有意义学习

数学有意义学习是指新的数学知识与学生已经建构的数学认知结构中的相关部分相互作用，数学语言、符号所代表的新观念与学生认知结构中原有的适当观念建立了实质性、非人为性的联系，从而纳入到学生原有的认知结构中^[9]，新知识的同化与旧知识的改造在这一过程中同时发生。思维是数学有意义学习所侧重的过程，它避免使学生的大脑处于被动接受的状态，促使学生主动解释所接受的信息^[10]。数学有意义学习理论对指导当前数学教育教学实践具有重要意义。

三、单元教学设计

单元教学设计是以教材为基础，分析教材内容，对其中具有联系的知识合理地进行重组与整合，形成新的大单元，基于整体性思维有序规划教学要素，以达到更佳教学效果的教学设计^[11]。

单元教学的中心思想是注意从整体的高度思考将研究对象组建成学习单元的系统思维^[12]。与传统的课时教学不同，单元教学注重生成单元学习目标，并将其作为整体性任务，从单元的选择、内容的重组、设计及分解学习目标、组织和实施课堂活动、评价与反思乃至作业练习等多个环节进行系统设计。

四、数学单元教学设计

数学单元教学设计是从整体性出发，为培育学生数学核心素养，对教材中符合逻辑关系的内容进行合理地重组，优化为一个相对独立的单元，目的是为了突出数学内容的主线以及知识间的关联性，新的教学单元需要不断改进^[13]。数学单元教学设计可以以数学知识为主线组织，通常参照教材进行适度改造，也可以围绕思想方法或数学学科核心

素养组织,对教科书进行较大幅度的整合。

在进行数学单元教学设计时,教师根据课标要求以及查阅的相关资料,结合学生学情和自身对知识的把握,在整体性思想的指导下寻找知识间内在的逻辑统一性和数学思想方法的迁移,对教材内容进行适当的选择、重组和改造。单元教学设计有利于学生站在高观点下明晰单元知识点,促进新旧知识的相互转化,发展出良好的认知结构;也有利于学生运用知识间的逻辑顺序进行学习迁移,掌握学习方法,协助学生由“学会知识”转变为“学会学习”,发展高阶数学思维,最终实现的是有意义学习。

1.2.2 理论基础

一、有意义学习理论

20世纪50年代中期,认知主义学派兴起,它否认行为主义学派的理论,认为学习并非依靠尝试和错误,而是通过感、知觉得到并由人脑主观组织作用实现的。瑞士心理学家皮亚杰最早提出认知结构的概念,认为个体与环境不断互动中实现建构的过程即为认知的形成和发展,涉及图式、同化、适应和平衡^[4]。

奥苏贝尔在皮亚杰等人的研究基础上提出了有意义学习理论,认为有意义学习的实质就是在符号所代表的新知识与学习者认知结构中已有的适当知识之间建立起非人为的和实质性的联系。美国戴维·乔纳森教授认为问题解决是有意义学习的本质,教师应该借助教育技术手段帮助学生开展主动的、建构的、有意图的、真实的与合作的学习^[4]。美国学者L·迪·芬克首次提出了“有意义的学习经历”这一概念,认为有意义的学习应在知识建构的同时深化到学习者的行为、情感、态度和人格等各方面,为将来的行为活动做准备^[15]。宋善炎、丁向阳认为芬克提出的“有意义的学习经历”能让学生获取融入社会所必备的价值,更快更好地社会化,这是对“有意义学习”的量的突破、质的飞跃,是“有意义学习”理论的又一次升华^[16]。

二、建构主义理论

建构主义理论指出,主体通过主动建构获得认识,知识是主体建构出来的产物;主体已有的认知结构在建构过程中尤为重要且同时处于不断发展中^[4]。建构主义学习理论强调学生应当积极探索知识,主动建构知识,重视师生、生生之间的社会性活动对学习的影响^[17]。因此在数学教学中,教师只通过讲解传授知识是不够的,教师更应成为课堂活动的组织者、引导者、合作者,如可以创设与学习者生活经验有关的整体性任务,学生个人或小组通过探索有关问题,发现并掌握完成任务所需的知识和技能,最终能够解决问题,教师在这个过程中指导和促进学生建构起新知识的个人意义。

三、认知结构学习理论

认知结构学习理论由美国著名教育家布鲁纳提出。他认为,人们通过过去的经验

形成认知结构,通过其感知、概括外部物质世界,认知结构并非一成不变,而是在学习过程中不断变动^[4]。认知结构学习理论强调知识结构的重要作用。布鲁纳曾说,“任何学科都应使学生理解其基本结构”^[18]。基于此,布鲁纳认为,学校课程设计要把基本知识结构放在中心地位,学生懂得基本原理就更容易理解学科内容,这有助于记忆学习内容,增进学习中的迁移,激起学习动机或兴味^[4]。然而在学生的实际学习中,教材虽然是以合乎逻辑的形式呈现知识,但学生有可能感受不到结构的存在。因此在教学中,为了使学生在 学习过程中知觉到的新知识更有意义,教师应该将其以合适的方式组织起来,让学生尽快地把握学科的基本内容结构。

1.3 国内外研究现状及述评

1.3.1 研究现状

一、有意义学习理论

奥苏贝尔的有意义学习理论对教育心理学产生了重大影响,目前,国内的许多学者也对有意义学习进行了研究。我国学者邵瑞珍、皮连生等对奥苏贝尔的认知接受理论进行了简述,但同时也认为奥苏贝尔的体系中存在德育心理学显得欠缺的问题^[19]。曹才翰认为,相较于机械学习,有意义学习更能协助学生建立起良好的认知结构,因此教师在组织课堂教学时应该注意整体思维的指导,最好使用一般-个别-一般方式来组织^[9]。涂荣豹认为,学生可以以有意义接受学习的方式学习数学知识,但对数学解题而言,则需要学习者亲身独立参与解题过程,属于有意义发现学习^[20]。钱珮玲则强调了数学教学活动对有意义学习的重要性,认为数学教学必须鼓励学生在行动和思维上都积极参与数学活动,教学应该在促进学生有意义的数学活动中进行,以帮助学生构建和发展认知结构^[21]。张晓斌认为良好的问题情境有助于揭示学习材料的意义以使学生积极主动地使新旧知识发生相互作用,完成原有认知结构对新知识的同化,最终实现有意义的学习,并提出了“小步距”、“变式”、“精制式”、“知识丰富域”等创设情境策略^[22]。戴风明认为,可以在数学教学中通过优化教学设计,为学生创设“有意义的学习经历”,实现学习者的有意义学习;认为教师可以通过重新审视“双基”、开展数学活动、注重学习迁移、改变学习方式等途径来提高数学教学的有效性^[2]。余文森认为,有意义学习是一种以思维为中心的理解性学习,其特点是学生全身心的投入,其结果不仅是认识和能力的发展,而且是情感和人格的完善^[23]。赵卓、汤婷婷等认为要实现有意义学习还可以借助思维导图的方式,对帮助教师架构清晰的知识体系、提高学生记忆效率、促进学生养成逻辑思维方法和发散性思维能力有十分重要的意义^[24]。朱京曦强调了互动在有意义学

习活动中的重要性,认为互动能使师生对知识从不同角度、不同层次进行反复认知与碰撞,从而在这个过程中建立新旧知识的联系,实现有意义学习^[25]。

上述研究表明,有意义学习理论可以很好地解释发现学习和接受学习之间的关系,在数学学习领域有十分重要的理论意义。多数研究都在深入研究有意义学习理论的基础上给出了组织教学活动的策略,但在具体实践上相关文献较少。因此,进一步讨论有意义学习理论在高中数学课堂教学中的应用有十分重要的意义。

二、单元教学设计

19世纪末20世纪初,欧洲新教育运动开启了单元教学时代。其倡导者、比利时教育家德可乐利在其创办的“隐修学校”(或“生活学校”)中推行以满足儿童兴趣为中心的教學法思想,其中包括取消分科教学、组成多科中心课题进行综合教学等^[26]。此后,杜威主张实用主义“单元教学”,其学生克伯屈提出了“设计教学法”,将与儿童生活有关的问题编制成一个个单元进行教学。1931年,美国莫里逊提出莫里逊单元教学法,通过单元教学的方式,使学生在一段时期内集中解决一个问题。以上所述,都大大推动了单元教学的发展。

中国最早出现单元教学的思想是在20世纪二十年代。1920年,梁启超提出分组比较教学法,主张语文教学应当“一组一组地讲”^[27],按类分章、节编排教科书的思想已经具备了单元教学的雏形。新文化运动时期,俞子夷等人引入克伯屈的设计教学法^[28],推动了单元教学思想在中国的进一步发展。

20世纪90年代以后,随着大量国外教育理论的传入,专家学者们开始越来越多地关注单元教学设计。单元教学设计为突出数学知识脉络与知识间的关联性,对教材相关内容进行统筹重组和优化,达到挖掘知识本质、促进学习迁移、真正提高学生数学学习能力的目的^[29],因此成为了中学课堂教学研究的趋势所向。例如,覃可霖认为单元教学尤其在培养学生自学能力方面有不可替代的优势,他主张由教师精讲一篇,其余由学生自学;将几个单元组成一个大单元,反映了其系统整体性^[30]。马兰认为教学是一门技术,应当将“整体性”和“有序性”结合起来,在整体性思维的指导下遵循教学设计已有的基本步骤和技能,借助“有序”赋予“整体”实践性价值,提出了整体化有序设计单元教学的基本操作五步骤^[31]。钟启泉认为,我国中小学教师研修的重心放在基于核心素养的单元教学上能够避免脱离学习者认知的碎片化教学,提出单元教学一般遵循“ADDIE”模型而展开^[32]。吕世虎详细阐述了数学单元教学的内涵、作用等,提出了数学单元教学五个操作步骤流程,以及可以围绕核心知识、思想方法、核心素养或基本能力的多种组织形式^[33]。章建跃从发展学生核心素养的角度出发提出实施单元教学,认为单元教学是真正实现个体元认知与认知建构、学会数学地思考的一种途径,可以依照“整体-部分-整体”的模式进行^[33]。李大永从数学学科的角度出发,基于对数学思想方法的理解,重点辨析了曲线方程与函数的区别与联系,对解析几何模块进行了整体教学设计^[34]。章飞、

顾继玲等认为通过单元的整体设计能够落实核心素养的养成,从学习单元、学习目标、学习素材、作业四个方面进行了系统的设计,提出了“总-分-总”的单元教学设计路径^[12]。崔允漦认为“逐个”知识点的“了解”“识记”“理解”等目标在学科核心素养的背景下退出历史舞台,为适应新的教学目标要求,大单元应运而生^[35]。喻平教授认为,发展学生的数学核心素养,就应当着眼于知识结构的数学,采取单元教学的方式,提出可以以问题解决过程线索、以建立个体 CPFS 结构、以概念生长、以数学思想方法解决问题四种模式为主题进行单元教学设计^[36]。何小亚等人以三角函数为例,提出了数学单元教学设计标准,包括:课程教材分析、教学目标分析、重点数学解析等环节^[37]。

可以看出,有关单元教学的研究已经有相当长的一段时间,尤其是自核心素养提出以来专家学者们对单元教学的关注度日益增长。但对文献分析后可以发现,对单元教学的研究多是从两个角度入手:一是专家们从理论层面给出设计方案,缺乏与具体实践的结合;二是一线教师从实践需要的角度设计教学方案,但更多的是依据教师经验而缺乏理论指导。同时,多数研究强调了单元教学对促进学生良好认知结构、提高学生学习能力有重要意义,但未能明确揭示单元教学与有意义学习理论之间的关系,忽视了能够促进学生有意义学习的单元教学方式。

三、国内关于“圆锥曲线的方程”内容的研究

文献中关于《圆锥曲线的方程》这一章的教学活动的研究主要包括:不同版本教材分析和比较、教学的困难与策略研究、相关数学史的研究以及教学理论与实践研究等几个方面。对于从整一章节的视角下研究《圆锥曲线的方程》的教学,李铁安、宋乃庆认为数学史应当应用于数学教学,因此从数学史的视角提出了高中解析几何教学的四个策略,分别是“整体文化驱动”、“核心概念统领”、“思想结构分拆”、“双向模式转化”^[38]。汪晓勤等也通过重构椭圆历史顺序,使得学生在掌握解析几何典型范例的基础上把握椭圆概念的本质^[39]。徐章韬以圆为基础,将直线、圆和圆锥曲线“一连串”起来,以圆为母体引出三种圆锥曲线,实现其间的相互转化,体现了这一部分内容学习的整体性^[40]。椭圆作为圆锥曲线的第一课,“拉线作图”是其定义引入最主要的方式,但一部分专家学者认为这一操作过于突兀,给出了引入椭圆的其他途径。例如李振雷提出通过直观观察圆与椭圆的关系,引出椭圆是“将圆压扁”得来的,进而通过在坐标系内将圆的纵坐标缩短得到椭圆^[41]。罗德建、伍春兰则通过改变圆的定义中的条件,引导学生发现椭圆的定义;通过类比圆的几何性质,猜想、推导出椭圆的标准方程^[42]。对于第二课双曲线的教学策略研究,采取比较多的方法是从类比椭圆的定义入手,让学生实际动手操作,探究与两定点距离之差为常数的动点轨迹,从而引出双曲线的定义;依旧类比椭圆鼓励学生自主推导出双曲线的标准方程。对于第三课抛物线,由于其定义不能由椭圆和双曲线的第一定义直接类比得到,因此如何合理、自然地引入抛物线定义一直是教师较为关注的问题。朱胜强借助 Dandelin 球让学生直观感受抛物线是椭圆或双曲线在一定

约束条件下无限演变后的一种极限形态,从而顺利地发现抛物线的几何特征^[43]。曾荣基于思想方法的视角对传统的圆锥曲线知识单元进行重组,利用椭圆形成圆锥曲线学习大框架来指导抛物线的学习^[44]。杨勇设计了《圆锥曲线的方程》一章的起始课,认为其应包括探究 Dandelin 双球模型“锥形”和了解圆锥曲线的背景及应用两部分^[45]。陆琳琰在其硕士论文《抛物线的发生教学研究》中从数学史、知识逻辑、学生的认知需求和生活实际出发,从知识发生的角度设计抛物线教学^[46]。王海青在其博士论文《问题驱动理论下“圆锥曲线与方程”教学重构》中紧扣 Dandelin 双球模型、圆锥曲线的光学性质、圆锥曲线内部知识点之间的密切联系这三条主线,给出了一套完整的单元教学设计^[47]。冉丽冰在其硕士论文《发展和完善高中生数学认知结构的整体教学策略研究》中对《椭圆及其标准方程》进行了教学设计,认为教师应当向学生讲解并展示高中阶段学生要学习的解析几何知识“图式”,进而让学生能够自主建构“图示”^[48]。胡腊梅在其硕士论文中阐述了深度学习与单元教学的联系,给出了《圆锥曲线的统一定义》和《圆锥曲线的变式解题研究》两篇教学设计^[49]。

通过以上分析可以发现,国内已有很多关于《圆锥曲线的方程》一章内容的研究,也有越来越多的专家学者从多种角度出发,研究圆锥曲线单元教学。在这些角度中,如何用学生能够理解的方式合理、自然地将原始定义转化为第一定义是许多专家学者们关注的焦点问题,在本论文中应重点关注和思考。另外,部分研究只是孤立地讨论“圆锥曲线与方程”单元内容和知识结构,没有与其他模块知识进行有效整合,针对学生学情尝试重新组合教科书的课时顺序。虽然一些研究提出了圆锥曲线单元设计框架,但限于篇幅,未能完整地展示整章的单元教学设计。因此,笔者在后续的《圆锥曲线的方程》单元教学设计中会更加关注这几个问题。

1.3.2 研究述评

纵观国内外对有意义学习和《圆锥曲线的方程》一章的单元教学设计的研究,我们可以发现,无论是在理论上还是在实践上都已取得一定的进展,单元教学对增强学生的主体性,培养学生核心素养,提高学生能力等方面有着重要的作用,对《圆锥曲线的方程》一章也已经有了单元教学设计。但部分研究忽视了学生的有意义学习,一些单元教学研究由于受到篇幅限制,只能提出设计框架,针对其中一种圆锥曲线的教学进行重点设计,理论性较强。基于以上认识,本论题拟结合当下高中数学单元教学现状,在充分领会有意义学习对学生发展的重要价值与意义,理解建构主义理论、认知结构学习理论的具体内涵等基础上,对《圆锥曲线的方程》一章进行单元教学设计,以期能够对一线教师实施《圆锥曲线的方程》教学活动提供一定的教学思考和参考。

1.4 研究内容与研究目的

1.4.1 研究内容

笔者在查阅大量相关文献后,尝试对接有意义学习理论与单元教学理论,分析问卷数据,探讨促进高中数学有意义学习的单元教学的设计思路,并以《圆锥曲线的方程》一章为例展开单元教学设计。研究的主要内容包括:

(1)对实习中学部分班级的学生进行问卷调查,以了解学生对圆锥曲线这一章内容的学习现状和对以往数学学习中经历单元教学的感受,以及调查该校老师对单元教学的认识与应用现状;

(2)编写在整体性思维指导下、促进有意义学习的《圆锥曲线的方程》单元教学设计。

(3)对研究结果进行反思和总结,给出促进有意义学习的单元教学策略,为一线教师实施单元教学实践提供一定的教学参考和思考。

1.4.2 研究目的

践行有意义学习对发展学生良好认知结构、培养学生关键能力有着积极影响,单元教学从整体性的高度重新组合教学要素,优化教学过程。目前已有相当数量的、数学单元教学方面的研究,如基于深度学习、基于 ADDIE 模型的数学单元教学设计研究等,但对促进高中数学有意义学习的单元教学设计研究相对较少;另外也有一些研究由于篇幅受限,仅对这一单元的整体设计提出构想,然后较为完整地展现某一种圆锥曲线的教学设计。为了更好地通过单元教学促进学生在《圆锥曲线的方程》一章的有意义学习,本文拟实现以下两点研究目标:

(1)基于石河子市某高中学生对圆锥曲线的学习现状和在过往数学学习中经历单元教学的感受,以及一线教师对单元教学的认识与使用现状,以吕世虎等人提出的数学单元教学设计流程为基本框架,编制《圆锥曲线的方程》一章的单元教学设计;

(2)基于文献调研和现状调查等,提出促进有意义学习的高中数学单元教学策略,为教师更好地利用单元教学发展学生良好认知结构,深层次地发展学生数学高阶思维能力,实现学生有意义学习提供参考。

1.5 研究思路与方法

1.5.1 研究思路

首先, 阅读有意义学习理论和单元教学理论的相关文献, 了解该理论的内涵、特征以及当下研究者们关注的主要问题; 尝试对接有意义学习理论与单元教学理论, 探索能够促进有意义学习的高中数学单元教学的特征。

其次, 调查实习学校部分一线教师对单元教学的了解程度、认可态度和使用频率等; 对实习学校部分高三班级的学生进行调查, 了解其对圆锥曲线的认识、学习时遇到的困难和对在以往数学学习中经历单元教学的感受等。

再次, 基于上述工作给出《圆锥曲线的方程》一章促进高中数学有意义学习的单元教学设计。

最后, 根据研究结论提出几点促进有意义学习的高中数学单元教学的策略。

1.5.2 研究方法

本研究采用了“文献研究法”和“问卷调查法”, 力求研究具有有效性、客观性以及可推广性。

一、文献研究法

笔者借助万方数据知识服务平台数据库、中国知网论文数据库等平台, 查阅有关有意义学习理论和单元教学理论方面的文献, 梳理相关理论知识与研究现状, 明确有意义学习理论和单元教学理论的内涵, 以思考如何进行高中数学相关内容的“有意义学习”与“单元教学”的有机融合。

二、问卷调查法

本论文向实习学校 12 位一线数学教师以及高三年级 A、B、C、D 四个班级的学生发放调查问卷, 调查学生对圆锥曲线内容的认知、对圆锥曲线难易感受的成因、对圆锥曲线的具体知识的掌握情况以及在以往教学中经历单元教学的感受; 调查数学教师对单元教学的了解和使用情况, 以及针对圆锥曲线内容使用单元教学的意见等, 再用 Excel 软件将调查的数据进行分析。

1.6 研究的重难点与创新之处

本研究的主要目的是根据高中数学单元教学实施现状, 针对《圆锥曲线的方程》

一章探寻能够促进有意义学习的高中数学单元教学设计，因此本研究的重点在于对《圆锥曲线的方程》一章的教材内容提出完整的、能够促进有意义学习的单元教学设计。通过文献研究发现，虽然目前已经有不少关于圆锥曲线单元教学的研究，但阐述其能够促进学生有意义学习的文献较少，因此本研究的难点在于提出能够促进有意义学习的单元教学策略。

相比于其他类似的研究，本研究的创新之处在于将有意义学习与单元教学相结合，结合当地教学实际，尝试重新整合教材给出的课时顺序，提出较为完整的、有针对性的《圆锥曲线的方程》单元教学设计。

第2章 相关问卷调查

通过对石河子市某高中部分高三学生和一线数学教师进行问卷调查,了解学生对圆锥曲线内容的认知、对圆锥曲线难易感受的成因、对圆锥曲线的具体知识的掌握情况以及在以往教学中经历单元教学的感受;调查石河子市一线高中数学教师对单元教学的了解和使用情况,以及针对圆锥曲线内容使用单元教学的意见等,为提出促进有意义学习的高中数学单元教学设计提供实证依据。

2.1 调查过程与内容

2.1.1 调查对象

由于笔者于2021-2022学年上学期在石河子市某高中进行教育实习,因此本研究的调查对象为该高中高三A、B、C、D四个班级以及该校12位一线数学教师,在分班时四个班级成绩水平大体相当。

表 2-1 调查班级具体情况

班级	文/理科	班级类型	班级人数
高三 A 班	理科	普通班	42
高三 B 班	理科	普通班	46
高三 C 班	理科	普通班	45
高三 D 班	理科	普通班	47

高三年级四个普通班在分班时成绩基本相当,且高三年级在前两年已经系统学习过圆锥曲线的内容,调查时正好在经历圆锥曲线的一轮复习,因此对问卷问题有更加清晰客观的认识。

2.1.2 调查分析工具

(1) Excel2019

使用 Excel2019 对调查问卷进行了数量和比例的统计,并通过数据绘制比较直观的图表,进行了定性与定量的数据分析。

2.1.3 调查问卷内容

（1）本论文参考胡腊梅在其硕士论文《深度学习视域下单元教学的研究与实践》中学生调查问卷的设计^[49]，制定了如附录 A 所示的问卷内容。问卷一共 11 道题，其中 1-3 题主要了解学生对圆锥曲线部分的主观理解；4-6 题主要了解学生学习圆锥曲线时的障碍或优势；7-11 题主要了解学生对圆锥曲线的具体知识和单元教学的认识情况。

（2）为了解教师对单元教学的认识情况，参考鞠文轩在硕士论文《基于 ADDIE 模型的数学单元教学设计的实践与思考》中教师调查问卷的设计^[50]，制定了如附录 B 所示的问卷内容，以调查教师对单元教学的了解程度、认可程度、使用时存在的问题等，同时在调查之后针对问题和选项对教师进行进一步询问。

2.2 学生问卷数据收集与分析

2.2.1 学生问卷数据的收集

笔者对实习学校石河子市某高中高三年级 A、B、C、D 四个班级的同学进行问卷调查，发放问卷 180 份，回收 175 份，有效问卷 170 份，有效率为 94.44%。各班数据收集如下：

表 2-2 调查班级有效问卷数

班级	人数	有效问卷数
高三 A 班	42	42
高三 B 班	46	41
高三 C 班	45	43
高三 D 班	47	44

2.2.2 学生问卷数据的分析

（1）学生对圆锥曲线部分的认知

表 2-3 学生对圆锥曲线地位的认知

选项	频数	有效百分比	累计百分比
非常重要	130	76.47	76.47
有点重要	34	20.00	96.47
不是很重要	6	3.53	100.00

一点也不重要	0	0.00	100.00
合计	170	100.00	100.00

由表 2-3 可知，有 76.47%的同学认为圆锥曲线部分的知识非常重要，值得好好学习，20%的同学对这一模块重要程度的感受较为模糊，仅有 3.53%的同学认为其不是很重要，可见学生们普遍认同圆锥曲线在高中数学学习中比较重要。

表 2-4 学生对圆锥曲线的兴趣程度

选项	频数	有效百分比	累计百分比
很有兴趣	40	23.53	23.53
有点兴趣	100	58.82	82.35
不太有兴趣	26	15.29	97.64
不感兴趣	4	2.35	100.00
合计	170	100.00	100.00

由表 2-4 可知，有 82.35%的同学对圆锥曲线感兴趣，有 15.29%的同学兴趣不大，仅有 2.35%的同学对其完全不感兴趣，可以看出，圆锥曲线部分的内容对大多数学生而言是具有吸引力的。

表 2-5 圆锥曲线对发展数学思维的帮助

选项	频数	有效百分比	累计百分比
很有帮助	94	55.29	55.29
有点帮助	66	38.82	94.11
不太有帮助	10	5.88	100.00
没有帮助	0	0.00	100.00
合计	170	100.00	100.00

由表 2-5 可知，绝大多数学生都认为学习圆锥曲线对发展数学思维能力有一定的帮助，一方面体现了圆锥曲线在高中数学内容中的重要地位以及对发展数学思维的重大帮助；另一方面也体现了学生对圆锥曲线部分十分重视，这有利于激发学生有意义学习的心向。

(2) 学生对圆锥曲线难易程度的感受及原因

表 2-6 学生认为学习圆锥曲线的困难程度

选项	频数	有效百分比	累计百分比
非常困难	40	23.53	23.53
比较困难	102	60	83.53
比较容易	19	11.18	94.71
非常容易	9	5.29	100.00
合计	170	100.00	100.00

由表 2-6 可知，83.53%的学生认为圆锥曲线部分的内容是困难的，有 16.47%的学

生认为该部分内容简单。第 5 题和第 6 题分别对学生认为圆锥曲线内容难或易的原因进行了调查，由于这两题为多选题，因此采用直方图展示调查结果，如图 2-1、2-2 所示。

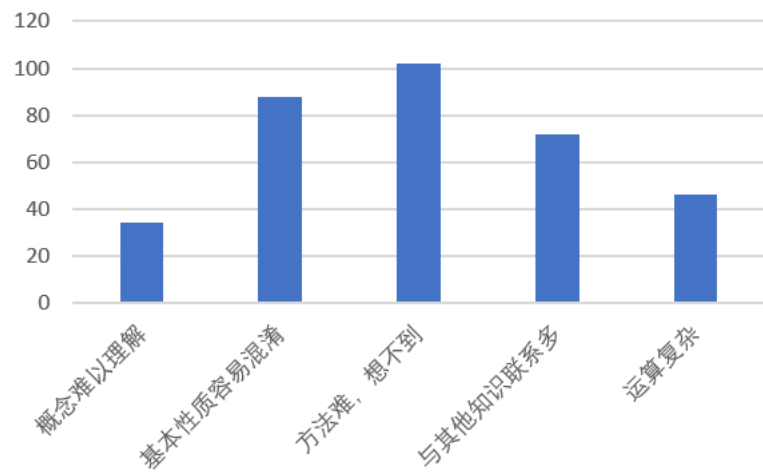


图 2-1 学生认为圆锥曲线难度较大的原因

从图 2-1 可以发现学生认为学习圆锥曲线时遇到的困难主要有“基本性质容易混淆”、“方法难，想不到”和“与其他知识联系多”这三个选项中。圆锥曲线模块内容多、方法难，在考试时也经常联系其他模块的知识一起考察。要帮助学生把握圆锥曲线间的共性与特性，挖掘圆锥曲线的深刻内涵，就要求教师在教学设计中思考如何促进学生对圆锥曲线内部知识、圆锥曲线与其他相关知识的良好认知建构。因此我们可以将目光转向注重整体性设计的单元教学，激发学生思维，达到有意义学习的目的。

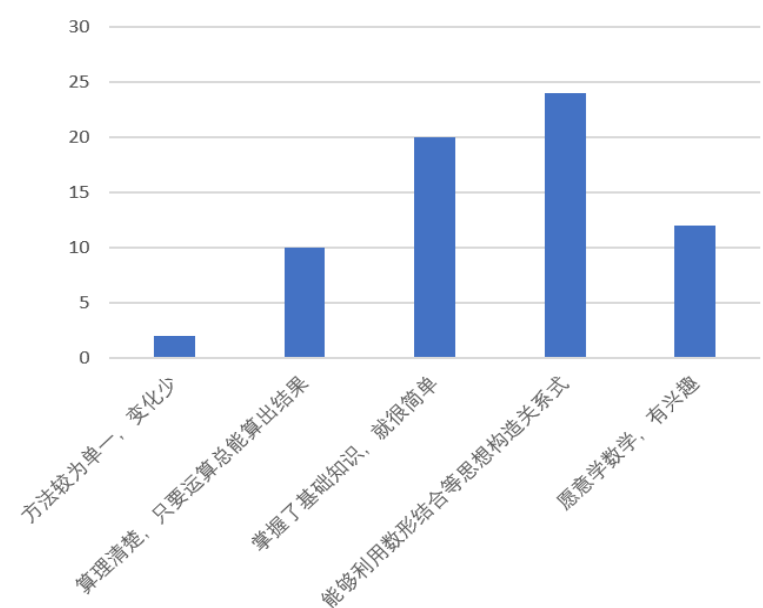


图 2-2 学生认为圆锥曲线容易掌握的原因

从图 2-2 能够发现大多数同学选择了“能够用数形结合等思想构造关系式”和

“掌握了基础知识，就很简单”，对比上面的分析可以认为，掌握数形结合思想和完善圆锥曲线认知结构是学习本章节的重点。

(3) 学生对圆锥曲线的具体知识和单元教学的认识

表 2-7 学生对圆锥曲线第一定义的掌握程度

选项	频数	有效百分比	累计百分比
完全可以	22	12.94	12.94
基本可以	112	65.88	78.82
有些可以	30	17.65	96.47
不可以	6	3.53	100.00
合计	170	100.00	100.00

表 2-8 学生对圆锥曲线统一定义的掌握程度

选项	频数	有效百分比	累计百分比
完全可以	20	11.76	11.76
基本可以	90	52.94	64.70
有些可以	51	30.00	94.70
不可以	9	5.29	100.00
合计	170	100.00	100.00

结合表 2-7、表 2-8 可以发现，78.82%的学生能够掌握圆锥曲线的第一定义，但仅有 64.70%的学生能够掌握统一定义，这说明部分学生还未能理解圆锥曲线的概念是到定点和定直线的距离之比为常数 e 的点的集合，反映了教师对概念的讲解过程有些割裂，未能很好地将统一定义纳入学生的认知结构中，导致部分学生不能理解圆锥曲线的内在联系，产生死记硬背的机械学习。

表 2-9 学生对以往数学学习中使用单元教学方式的认可程度

选项	频数	有效百分比	累计百分比
帮助很大	62	36.47	36.47
有些帮助	102	60.00	96.47
帮助不大	4	2.35	98.82
没有帮助	2	1.18	100.00
合计	170	100.00	100.00

经了解，调查班级的学生曾在《平面向量的运算》以及《数列》模块使用过单元教学的方式，对于单元教学能否优化学习效果的调查中，有 96.47%的同学认为有帮助，2.35%的同学认为帮助不大，仅有 1.18%的同学认为没有帮助，可见大多数同学还是认可单元教学能够促进良好学习效果的。根据调查数据结果，参与调查的大多数学生并不排斥单元教学形式，且在以往数学学习中经历单元教学收到了较好的反馈，因此认为可以尝试在圆锥曲线部分进行单元教学设计。

2.3 教师问卷数据收集与分析

2.3.1 教师问卷数据的收集

笔者参考鞠文轩的硕士论文《基于 ADDIE 模型的数学单元教学设计的实践与思考》中的教师调查问卷，设计了 9 道题目（详细见附录 B），对所在实习学校——石河子市某高中的 12 位一线数学教师进行调查。问卷共发放 12 份，回收 12 份，有效 12 份，有效率 100%。

2.3.2 教师问卷数据的分析

1-7 题主要调查教师对单元教学的认识情况、使用情况和态度等。

（1）数学教师对单元教学的了解程度

表 2-10 数学教师对单元教学的了解程度数据分析

选项	人数	百分比
比较了解	6	50.00
一般	4	33.33
较少	1	8.33
不了解	1	8.33
合计	12	100.00

由调查结果可以发现，有 50%的高中数学教师对单元教学比较了解，有 41.66%的教师对单元教学的有一定的了解，另外有 8.33%的教师完全不了解单元教学，结合学生调查问卷中对使用单元教学方式学习的反馈结果，大多数学生认为单元教学对促进数学学习很有帮助，因此有必要对单元教学进行研究。

（2）数学教师对单元教学的使用程度

表 2-11 数学教师对单元教学的使用程度

选项	人数	百分比
基本都会	0	0.00
经常会	4	33.33
偶尔会	6	50.00
基本不会	2	16.67
合计	12	100.00

由表 2-11 可知，调查中的大多数教师不会常常使用单元教学的方式，笔者随后对教师进行了询问，运用单元教学法进行教学的模块有《平面向量的运算》和《数

列》，部分教师表示单元教学对教师水平和学生素养的要求较高，因此其他许多章节仍选择使用传统的教学方法。可以看出，教师自身业务能力和学生学习水平等因素都制约着单元教学的实施，教师在进行单元教学设计时需要做好充分的准备工作，如认真钻研课标和教材、对学生学情有较为全面清晰的认识等。

（3）数学教师对在高中阶段开展单元教学必要性的认识

表 2-12 数学教师对在高中阶段开展单元教学必要性的认识

选项	人数	百分比
非常必要	4	33.33
有一定必要	6	50.00
没有太大必要	2	16.67
没有必要	0	0.00
合计	12	100.00

从表 2-12 的数据可以得知，老师们普遍认为在高中数学教学中使用单元教学是有必要的，其中 33.33% 的老师认为非常有必要，50% 的老师认为有一定必要，而 16.67% 的老师认为没有太大必要。笔者在与这两位老师的交谈中了解到，他们认为单元教学对学生要求比较高，能否实施还应根据学生的学习水平考虑他们是否能够接受，因此会有选择性地使用单元教学的方法。

（4）教师对单元教学方法的了解程度

表 2-13 教师对单元教学方法的了解程度

选项	人数	百分比
非常清楚	0	0.00
比较清楚	5	41.67
一般	6	50.00
不清楚	1	8.33
合计	12	100.00

由表 2-13 可以看出，教师对单元教学方法还并不是非常熟悉，笔者在后续的交谈中了解到，部分教师认为单元教学就是将教科书上的单元视为一个整体进行教学，而不了解单元教学的多种组织方式以及重组教材课时顺序的特点，对单元教学的认识略有欠缺。可见，虽然大多数教师认为单元教学很有必要，但仍需在理论指导方面进一步跟进。

（5）教师对单元教学促进自身业务能力提高的认识

表 2-14 教师对单元教学促进自身业务能力提高的认识

选项	人数	百分比
非常有	5	41.67

有一些	6	50.00
不太有	1	8.33
没有	0	0
合计	12	100.00

由表 2-14 可知, 有 91.67% 的教师赞成单元教学的使用提升了自身的业务能力, 对教师职业发展有促进作用; 有 8.33% 的教师认为单元教学对自身发展作用不大, 0% 的教师认为单元教学完全没有作用。教师们表示, 在对《平面向量的运算》和《数列》模块进行单元教学时, 需要通过大量查阅辅助资料来制定教学内容, 同时在多次研读教材与课标的过程中, 也会对知识内容有进一步的理解, 这都在一定程度上正向激励了教师的专业提升和发展。

(6) 教师单元教学前的准备程度

表 2-15 教师单元教学前的准备程度

选项	人数	百分比
经常	4	33.33
有需要时	6	50.00
偶尔	2	16.67
不查阅	0	0
合计	12	100.00

由表 2-15 可知, 调查中的大部分老师在准备单元教学时都会查阅辅助资料, 只有两位老师偶尔会查阅资料。笔者在询问中得知, 这两位老师会对自己有把握的内容采用单元教学的形式, 因此基本是按照自己已有的知识水平进行设计, 只在需要时查阅辅助资料; 其他老师表示, 单元教学对教师素质提出了较高的要求, 需要大量阅读教学参考和相关资料辅助教学, 侧面说明了单元教学确实能够促进教师自身业务能力的提高。

(7) 教师在单元教学后, 是否会对教学效果评价分析

表 2-16 教师对教学效果评价数据分析

选项	人数	百分比
经常会	5	41.67
有时会	5	41.67
偶尔会	1	8.33
不会	1	8.33
合计	12	100.00

由表 2-16 可知, 在调查的教师中, 有 41.67% 的教师经常会对教学效果进行评价和分析, 有 41.67% 的教师有时会进行评价分析, 8.33% 的教师选择“偶尔会”, 有一名

教师表示不会进行教学效果的评价和分析。笔者通过调查发现,这几位经常反思教学效果的教师所带的班级数学平均成绩更高。

(8) 教师在圆锥曲线教学开始前对学生已有知识水平的关注程度

8、9 两题主要关注教师对《圆锥曲线的方程》一章的备课程度,以及对这部分内容采用单元教学的方法的接受程度。

表 2-17 教师在备课圆锥曲线时对学生已有知识水平的关注程度

选项	人数	百分比
精心考虑	8	66.67
有所考虑	4	33.33
不怎么考虑	0	0.00
不考虑	0	0.00
合计	12	100.00

由表 2-17 可知,在所调查的教师中有 8 位会精心考虑学生已有的解析几何知识基础和理解能力,另外 4 位也表示会“有所考虑”,这是由于圆锥曲线在高中数学阶段属于相对比较难的模块,对学生的知识基础要求较高,因此应重视对学情的考虑,有针对性地设计适应本班学生程度的教学方案。

(9) 教师对于圆锥曲线能够促进完善学生解析几何认知结构的认识

表 2-18 教师对于圆锥曲线能够促进完善学生解析几何认知结构的认识

选项	人数	百分比
很有帮助	8	66.67
有一定帮助	3	25.00
一般	1	8.33
没有帮助	0	0.00
合计	12	100.00

在“您认为在《圆锥曲线的方程》一章实施单元教学对学生建立平面解析几何的整体认知结构是否有帮助”的调查中,有 66.67%的教师认为“很有帮助”,25%的教师认为“有一定帮助”,8.33%的教师选择了“一般”,0%的教师认为“没有帮助”。在后续的交谈中,笔者详细询问了教师们的看法,他们认为圆锥曲线在高中数学解析几何部分中占有十分重要的地位,是《直线与圆的方程》一章的拓展和加深,是数形结合思想的良好载体,单元教学相较于传统的教学,能够给学生更多自主思考的空间,重组学习内容帮助学生更好地建立良好认知结构。可见,教师对针对《圆锥曲线的方程》一章实施单元教学能够促进学生认知水平的发展普遍持赞成态度。

2.4 调查分析结论

根据上文的数据分析,总结出以下结论。

(1) 调查班级的学生普遍认为《圆锥曲线的方程》一章在高中数学学习中占有重要地位,其内容对发展数学思维能力具有巨大作用,对圆锥曲线兴趣较高。可以看出,学生在心理上对学习圆锥曲线内容做好了准备,具备积极主动地将新知识与原有认知结构相结合的倾向性,即具备有意义学习心向。

(2) 调查班级大多数学生认为圆锥曲线部分内容较难,且困难成因主要集中在“基本性质容易混淆”、“方法难,想不到”和“与其他知识联系多”这几个方面。因此在教学设计时应从整体规划三种圆锥曲线概念的引入方式,做到从根本上让学生明晰椭圆、双曲线、抛物线间的联系与区别;圆锥曲线部分的题目解决方法灵活多样,但本质离不开用代数方法解决几何问题,因此在课堂教学中让学生理解用坐标法、数形结合思想解决二次曲线问题的可行性和有效性;圆锥曲线可以结合向量、三角函数等众多其他部分的知识进行考察,这就需要学生对圆锥曲线的本质有一定的了解,教师可从圆锥曲线的统一定义入手,帮助学生理解圆锥曲线的内在联系,这也可以解决学生对统一定义掌握不到位的问题。

(3) 根据以往数学学习中使用单元教学的经验,调查班级的大多数学生接受单元教学方式,调查的老师也普遍认同在《圆锥曲线的方程》一章实施单元教学对学生学习有诸多好处,这为在圆锥曲线部分实施单元教学提供了良好的基础。

(4) 调查中的大多数老师都认可单元教学对学生以及老师自身发展的重要性和有效性,但鉴于教师自身业务能力和学生水平,部分老师未能经常开展单元教学活动。有一些老师对单元教学的了解和掌握略有欠缺,在交流中这部分教师表示,在日常教学中会从整体性的角度设计课堂活动,但基本仍按照教材顺序安排教学内容,极少打乱原有的课时顺序再以合理的方式进行重组,而其实这正是单元教学中一个显著的特点,其目的在于更好地将新知识纳入学生原有的认知结构,使新旧知识发生实质性的联系,促进有意义学习的发生。调查显现,在实际教学活动中实施单元教学仍然存在一些问题,为使《圆锥曲线的方程》一章的单元教学能够顺应学生的认知水平,给一线教师合理重组课时顺序、优化教学效果提供更多思路,本论文尝试设计圆锥曲线一章的单元教学方案。

第3章 促进有意义学习的高中数学单元教学设计思路

本章将在文献调研和现状调查结果的基础上,对高中《圆锥曲线的方程》单元教学设计展开研究。主要参考吕世虎教授提出的数学单元教学设计的基本操作步骤(其流程如图3-1),并结合戴风明对有意义学习经历的研究成果,基于2019人教A版中圆锥曲线的相关内容,开展单元教学设计研究。

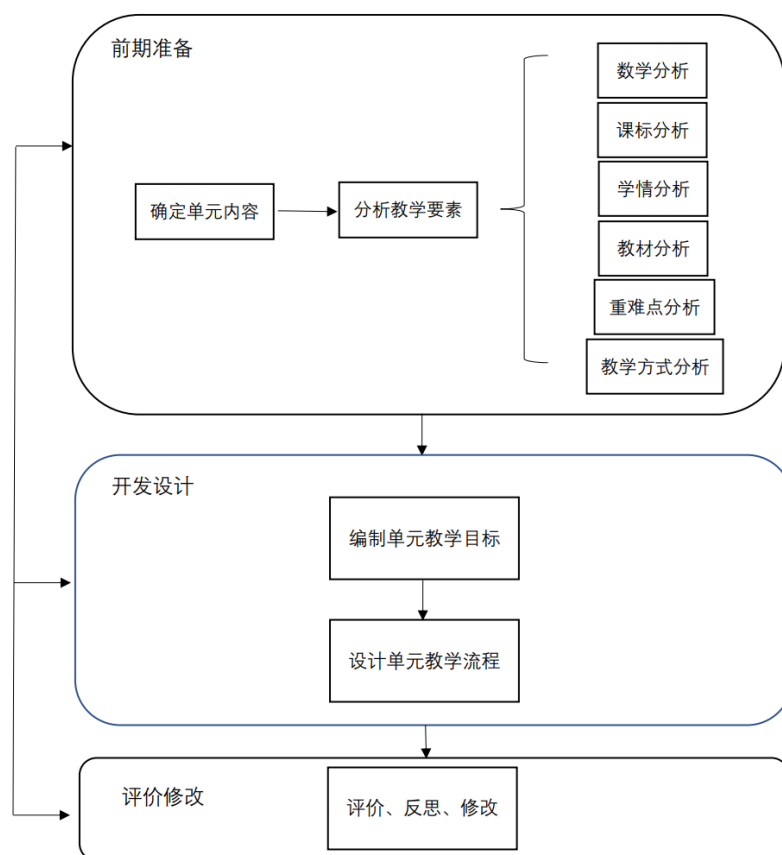


图3-1 数学单元教学设计基本操作步骤

3.1 确定单元内容

本研究选取圆锥曲线的知识为研究内容,《圆锥曲线的方程》一章是高中数学解析几何的重要组成部分,同时也是高考的高频考查点,学生学好圆锥曲线有助于运用坐标法解决平面解析几何中的数学问题和简单实际问题,感悟数形结合等数学思想,培育数学核心素养。

在单元教学中,可以以数学知识、思想方法、核心素养等为主线安排教学内容。

《圆锥曲线的方程》一章主要包括三种圆锥曲线的标准方程和几何性质，从知识技能的角度来看，其知识结构相近；同时本章的核心思想是用数形结合的思想方法，深刻认识数和形的辩证统一关系，因此本研究选取以数学思想方法为主线的组织方式，以《圆锥曲线的方程》一章为单元教学设计的主要内容。

3.2 分析教学要素

3.2.1 数学分析

一、圆锥曲线地位高、考频高，与其他知识联系密切

解析几何是数学发展过程中的一个重要里程碑，由平面解析几何和空间解析几何构成，圆锥曲线是平面解析几何的重要组成部分，也是高考的高频考点之一。圆锥曲线是重要的二次曲线数学模型，它不仅是对《直线与圆的方程》一章的深入，也是对大学数学《解析几何》课程及其他相关知识点的铺垫。

二、圆锥曲线渗透了数形结合的数学思想

圆锥曲线是平面解析几何的重要组成部分，解决圆锥曲线问题通常将点与数一一对应，利用代数方法解决几何问题，是数形结合思想的良好载体。因此在课程的开始，应特别注意对坐标法的引导，在传授知识的同时培养学生的思维策略，使学生主动地发现研究数学问题的方法。

3.2.2 课标分析

在2017年版2020年修订的《普通高中数学课程标准》中，《圆锥曲线的方程》与《空间向量与立体几何》、《直线和圆的方程》两个单元一起被划入选择性必修一的“几何与代数”主题中。与2003年《标准（实验版）》相比，《标准（2017年版2020年修订）》取消了每一单元的具体课时分配（如表3-1所示），在教材编写、教学实施时可以根据实际作适当调整，这一改变在很大程度上促进了单元教学的实施和发展。

表 3-1 新旧版本课程标准课时安排对比

课程内容	《标准（实验版）》	《标准（2017年版2020年修订）》		
空间向量与立体几何	空间向量与立体几何 （选修2-1） （12课时）	空间向量与立体几何 （选择性必修一）	空间向量与立体几何	几何与代数 （44课时）
直线与圆的	平面解析几何初步	直线和圆的方程	平面解析几	

方程	(必修2) (18 课时)	(选择性必修一)	何	
圆锥曲线 的方程	圆锥曲线与方程 (选修 1-1) (12 课时)	圆锥曲线的方程 (选择性必修一)		
	圆锥曲线与方程 (选修 2-1) (16 课时)			

《标准（2017 年版 2020 年修订）》要求在学习《圆锥曲线的方程》时应注意结合圆锥曲线的实际背景展开学习，能够从具体情境中抽象出椭圆，掌握三种圆锥曲线的定义、几何图形、标准方程和简单几何性质，体会数形结合的思想，能够简单应用椭圆、抛物线等。

可以看出，《标准（2017 年版 2020 年修订）》十分重视椭圆在圆锥曲线学习中的地位，因此在实际教学中要相应加强椭圆的比重；同时也强调了数学知识与实际生活的联系，注重概念的生成与数学思想方法的培养，最终实现数学核心素养的提升。

3.2.3 学情分析

学情要素是制定教学过程和教学目标的基石，因而教师在备课时不单要关注教材，还要考虑学生，充分了解学生的知识水平和学习习惯。学生在初中时期学习反比例函数和二次函数图像时已经初步认识了双曲线与抛物线，对椭圆也并不陌生，对认识圆锥曲线有一定的知识基础。其次，学生在学习本单元之前，已经通过《直线与圆的方程》一章学会在平面直角坐标系中利用坐标法研究直线和圆的标准方程、直线和圆的交点、直线和圆的位置关系等问题，为圆锥曲线的学习做好了铺垫。结合调查问卷的分析结果，学生对圆锥曲线相关内容的学习困惑主要表现在“概念难以理解、内容联系广泛、问题解决方法复杂多样”，因此在设计教学方案时应当充分借助学生的知识基础，将其作为即将学习的新内容的先行组织者，构建新知生长点，使学生自主发现研究圆锥曲线的方法——坐标法，使新旧知识彼此作用，促进学生认知结构的良好发展，激发思维，使学生不仅学会知识，而且学会学习，从而实现有意义学习。

3.2.4 教材分析

教材是依照课程标准编制的、系统反映学科内容的教学用书，教师进行教学活动关键依据教材内容，因此其在很大程度上影响着教学活动的进行方式。下面选取目前国内使用范围较广的人教 A 版（人民教育出版社课程教材研究所，2019）以及北师大

版（王尚志、保继光，2019）中《圆锥曲线的方程》单元的教材内容，从知识结构及内容安排、章节引入方式、内容呈现方式、阅读材料等方面进行比较分析，以更深刻地了解这一部分教学内容，以便进行单元教学设计。

一、知识结构及内容安排

1. 知识结构

两版教材均在单元小结部分给出了《圆锥曲线的方程》一章的知识结构图（如图3-2、图3-3）。

（1）人教A版

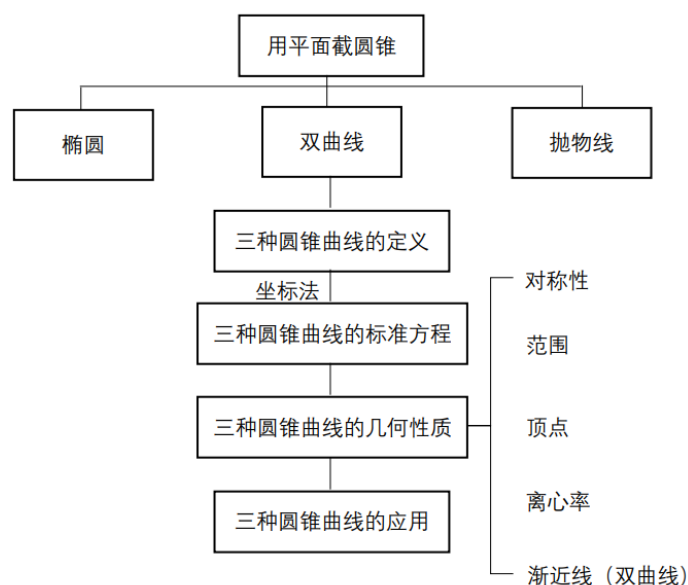


图 3-2 人教 A 版知识结构

（2）北师大版

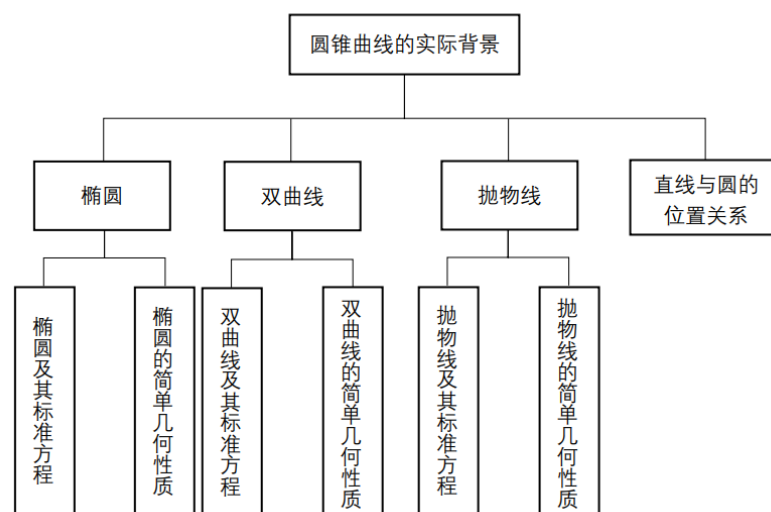


图 3-3 北师大版知识结构

两个版本的教材都是以圆锥曲线现实背景为起点展开本章内容，依照椭圆、双曲线、抛物线的顺序介绍，且每一种圆锥曲线都依照定义→标准方程→简单性质的结构展开。不同之处在于人教 A 版设计了从知识回归应用的部分，而北师大版则多设置了一个课时用来介绍直线与圆锥曲线的位置关系。总体来说知识结构基本相同。

表 3-2 两个版本的编排目录比较

人教 A 版	北师大版
1.椭圆 1.1 椭圆及其标准方程 1.2 椭圆的简单几何性质 信息技术应用 用信息技术探究点的轨迹：椭圆	1.椭圆 1.1 椭圆及其标准方程 1.2 椭圆的简单几何性质 阅读材料 圆与椭圆
2.双曲线 2.1 双曲线及其标准方程 2.2 双曲线的简单几何性质 探究与发现 为什么 $y = \pm \frac{b}{a}x$ 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线	2.双曲线 2.1 双曲线及其标准方程 2.2 双曲线的简单几何性质
3.抛物线 3.1 抛物线及其标准方程 3.2 抛物线的简单几何性质 探究与发现 为什么二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像是抛物线 阅读与思考 圆锥曲线的光学性质及其应用 文献阅读与数学写作 解析几何的形成与发展	3.抛物线 3.1 抛物线及其标准方程 3.2 抛物线的简单几何性质 阅读材料 圆锥的截线
	4.直线与圆锥曲线的位置关系 4.1 直线与圆锥曲线的交点 4.2 直线与圆锥曲线的综合问题 阅读材料一 圆锥曲线的共同特征 阅读材料二 圆锥曲线的光学性质

从编排目录来看，人教 A 版和北师大版在内容设置上基本一致。两个版本都十分重视数学文化的渗入，将数学史合理安排在圆锥曲线的教学活动当中；重视知识的实际应用。人教 A 版相较于北师大版还设置了信息技术的应用模块，注重培养学生的动手能力，帮助学生通过直观想象加深理解圆锥曲线这一部分的知识内容。从这一点来看，人教 A 版更加贴近课标要求。

2.内容安排

笔者对比两个版本教材对圆锥曲线的内容安排，总结出如图 3-4、图 3-5 的流程图。

(1) 人教 A 版

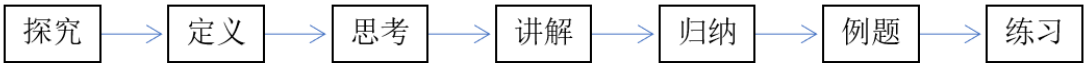


图 3-4 人教 A 版内容安排方式

(2) 北师大版

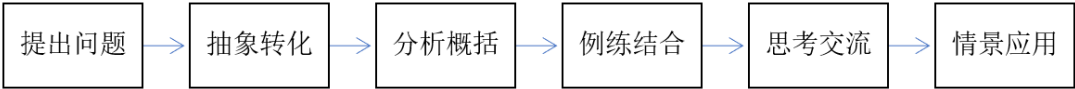


图 3-5 北师大版内容安排方式

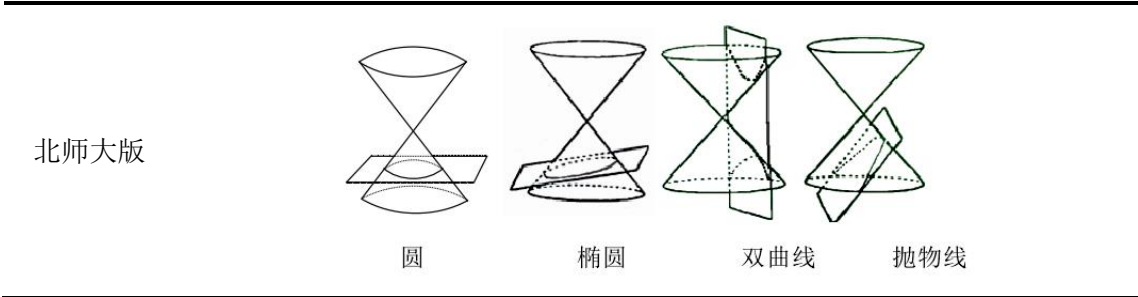
对于圆锥曲线知识的学习，人教 A 版从探究活动引入，得出定义，让学生先思考，再讲解，注重知识的再发生过程；北师大版则从实际问题出发，注重分析讲解，得到结论，使知识点明了易懂、逻辑清晰。

二、章节引入方式

人教 A 版与北师大版对圆锥曲线章节引入的思路基本一致，即从圆锥曲线的原始定义入手，以圆锥曲线的实际应用为载体，以坐标法为主要研究方法，展开对圆锥曲线内容的学习，体现了“先行组织者”策略。但两个版本也存在些微差别：一是对平面截圆锥的图示存在差异，表 3-3 展示了两个版本在章节引入时呈现的图示，可以看出北师大版用四幅图分别呈现圆、椭圆、双曲线、抛物线的不同截取形式，而人教 A 版是将三种圆锥曲线的截取方式放置在同一张图中；二是实例选取的思路不同，人教 A 版从现实生活入手，选取与学生有密切关系的实例展现圆锥曲线的广泛应用，北师大版则从数学史的角度出发，体现了圆锥曲线对科学发展的重要作用。

表 3-3 平面截圆锥图示

版本	图示
人教 A 版	



三、内容呈现方式

表 3-4 内容呈现方式

		人教 A 版	北师大版
概念	椭圆	探究活动“拉线作图法” →第一定义	问题情景→讲解“拉线作图法”→第一定义
	双曲线	类比椭圆引入→借助信息工具“拉线作图”→第一定义	类比椭圆引入→讲解“拉线作图法”→第一定义
	抛物线	利用信息技术作图→第一定义	二次函数引入→“丁字尺”作图→第一定义
标准方程	建立	观察形状→建立坐标系→标准方程	根据定义→结合形状→建立坐标系→标准方程
	推导	移项变式→平方化简	
几何性质		几何观察猜想→代数证明	代数探索与验证
统一定义		未做出详细说明，只在章末总结中以问题的形式作为交流思考的内容	在阅读材料一中详细推导了圆锥曲线的共同特征

在椭圆概念引入的部分，人教 A 版和北师大版都采用了“拉线作图”的方法得到轨迹进而引出定义，不同的是人教版采用了探究活动的方式，而北师大版则先通过举例生活中常见的“椭圆形状”引出本节课的学习，通过讲解“拉线作图”得到椭圆定义。但两版教材均未解释为何用平面截圆锥得到的椭圆又可以用“拉线作图”的方式得到：圆锥曲线的三维定义是如何转化为二维定义的？

两版教材对双曲线概念的引入都选择了类比椭圆定义入手，即改变“距离之和”为“距离之差”，再次通过“拉线作图”的方式得出轨迹引入定义。学生可能会问：为什么要改变“距离之和”的条件？如果改成“距离之积”、“距离之商”会有什么样的结果？两版教材对此都未做出详细说明。对于抛物线概念的引入，两版教材也都是选择了由画图到定义，未过多说明其与前面所学的椭圆、双曲线的联系。

对于三种圆锥曲线标准方程的建立和推导,两版教材大致相同,即都是通过观察形状建立坐标系,根据定义设出方程,移项变形平方化简。人教A版在探究圆锥曲线几何性质方面采取了先观察几何特征提出猜想,再运用代数方法验证猜想的方法;北师大版则是类比之前圆的学习方法,直接运用代数方法探索并验证几何性质。

四、阅读材料

阅读材料是附在正文后面用以补充完善正文内容的部分,大多介绍相关的数学史或有趣的数学故事等,用以提高学生学习数学的兴趣,帮助学生了解相关的实际背景。两个版本的教材都设置了阅读材料部分,下面将从其与课标的适切性、对圆锥曲线教学的辅助作用等方面对比分析两版教材的特点。

人教A版在每节后面都设置了阅读材料部分,并给出了圆锥曲线的光学性质及其应用的阅读材料;在章末设置了文献阅读与数学写作栏目,让学生了解和交流解析几何形成与发展的过程。北师大版的阅读材料则相对较少。另外,北师大版阅读材料的选择除章末的圆锥曲线的光学性质外,其余与人教A版也有很大不同:在椭圆一节后面介绍了通过增长(缩短)圆的坐标的方式可以得到椭圆,将圆与椭圆联系起来;在抛物线一节学习之后回归到章首引入部分,有意引导解释三种圆锥曲线的内在联系;在整章学习结束之后,北师大版又给出了两篇阅读材料,用以介绍圆锥曲线的光学性质和推导圆锥曲线的共同特征。

可以看出,人教A版与课标中联系现实世界、融入数学文化、运用信息技术等要求联系紧密,与课标的适切性较高,但教材中没有给出三种圆锥曲线的共同特征,也没有从离心率的角度揭示三种圆锥曲线的内在联系,与北师大版相比,人教A版在整体性方面重视不够,因此在教学设计中可以合理参考北师大版教材解决此问题。

3.2.5 《圆锥曲线的方程》重难点分析

一、单元整体教学重难点

《圆锥曲线的方程》是高中数学解析几何中的重点内容,数形结合思想和坐标法统领整章内容。三种圆锥曲线之间存在内在联系,而这种内在联系通过统一定义反映出来,同时三种圆锥曲线还具有各自的特性^[51],因此本章确定两个教学重点:能够依据圆锥曲线的几何图形和定义建立标准方程,利用标准方程研究圆锥曲线的几何性质;难点在于帮助学生把握三种圆锥曲线的共性和特性,体会坐标法在解决几何问题时的作用。

二、具体课时重难点

单元教学虽然是在整体性思想的指导下组织设计,但在实施过程中仍要把大目标拆分成许多小目标,落实到具体课时中去,《圆锥曲线的方程》单元具体课时的重难

点在第4章有详细说明,在此就不进行赘述了。

3.2.6 教学方式分析

在本章单元教学设计中用“先行组织者建立知识固着点”、“类比学习促进迁移能力”、“整体建构促进认知发展”的思路进行教学活动,从整体性出发,确保教学内容符合逻辑、有内在统一性,合理设计能够激发学生的学习兴趣的教学活动,促进学生实现有意义学习。

3.3 编制《圆锥曲线的方程》单元教学目标

单元教学目标是单元教学设计的“主心骨”。单元教学目标的制定一方面要能够统筹安排前后内容,提升学生能力,培育核心素养;另一方面要在具体课时中落实。因此,结合前文对课标、《圆锥曲线的方程》一章教材内容的分析等,其单元教学目标可表述为:

(1) 通过类比《直线和圆的方程》,使学生自主发现并掌握研究圆锥曲线的方法,体会使用坐标法的重要性和必要性,加深对数形结合思想的理解,培育学生数学抽象、直观想象、逻辑推理等核心素养。

(2) 在将三种圆锥曲线由原始定义转化为第一定义的过程中,领会三种圆锥曲线的内在联系,从整体上把握数学知识。能够掌握三种圆锥曲线的第一定义、标准方程和简单几何性质,理解其统一定义。

(3) 经历用圆锥曲线的标准方程及简单几何性质解决问题的过程,体会数形结合思想方法在解决问题中的作用,感受圆锥曲线在实际生活中的广泛应用,提升数学建模的数学素养,增强学生解决问题的能力。

3.4 设计《圆锥曲线的方程》单元教学流程

单元教学强调整体性,但仍需在具体课时中实施教学。这就要求教师在设计单元教学流程时要考虑将其划分为不同的阶段,每一个阶段要在一定的课时中实现。

根据上述对课标、教材、重难点等的分析,教师可基于教材对圆锥曲线的内容进行适当的重组,具体可分为三个阶段实施:第一阶段,经历借助 Dandelin 球将圆锥曲线的定义从三维向二维转化的过程,初步感知圆锥曲线内在联系,为学习圆锥曲线第一定义(二维定义)建立知识固着点。第二阶段,学习三种圆锥曲线的标准方程和简单几何性

质, 在学习的过程中体会类比和数形结合思想方法, 构建良好的认知结构。第三阶段, 以离心率作为主线, 揭示三种圆锥曲线的内在联系, 能够理解并掌握圆锥曲线的统一定义。这三个阶段的教学任务依次在三个教学模块中落实: 章首起始课、具体圆锥曲线概念和性质教学、章末收尾课。三个模块在宏观和微观上都呈“总-分-总”结构, 彼此关联、层层递进又前后呼应、有机统一。

3.4.1 章首起始课

章首起始课在整个单元教学中发挥“先行组织者”作用, 教师在讲授新课前对整个单元做整体的概括性介绍, 便于学生对新知识建立认知地图; 以学生已经掌握的内容作为知识固着点, 促进学生有意义的学习。

章首起始课主要针对第一阶段的内容进行设计。人教A版(2019)教材在章首引入部分给出的是圆锥曲线的原始定义。但此时椭圆、抛物线、双曲线对学生而言仍停留在简单了解其大致形状的浅层认识中, 因此如果只介绍定义而未给出实例说明, 学生难免会产生这样的疑问: 用什么样的角度截取截面曲线是椭圆? 什么情况下又是双曲线、抛物线? 教材给出的图示将三种圆锥曲线放置在一张图中, 对学生具体了解每一种圆锥曲线帮助不大, 此时学生的理解仅限于文字说明, 容易陷入死记硬背的机械学习当中。在章首起始课中, 教师借助 GeoGebra 画图工具直观地为学生展示从不同角度截圆锥所形成的曲线, 使学生对其有进一步认识, 构建认知生长点, 激发进一步的学习兴趣。

通过几何直观对圆锥曲线有大致了解后, 教师可在此时抛出问题: 如果要研究圆锥曲线, 你认为应该研究什么问题? 从哪些方面研究? 用什么方法研究? 引导学生通过联系之前学过的《直线与圆的方程》探寻问题的答案。教师可以给出《直线与圆的方程》一章的思维导图, 引导学生构建研究几何问题时的方法思路, 以及认识到坐标法和数形结合思想在研究几何问题时的重要作用。

教材在给出圆锥曲线的原始定义(三维定义)后, 直接进入正文部分, 用“拉线作图”的方式引入了椭圆, 得到了椭圆的第一定义(二维定义), 但这样的处理使“拉线作图”的方法有些突兀, 圆锥曲线定义从三维向二维转变的过程出现了中断, 学生很难理解为何用“拉线作图”就能将三维定义转化为二维定义; 教材类比椭圆定义将条件改为“距离之差”, 再次通过“拉线作图”的方式引入双曲线的定义, 思维未免有些过于发散, 并且无法解释改变为其他条件时(如“距离之积”、“距离之商”)产生的情况, 其根本原因是没有揭示圆锥曲线内在的联系, 缺乏整体性; 抛物线的引入虽然也使用了作图的方法, 在形式上与前面两种圆锥曲线保持了一致, 但为什么会想到运用“拉线作图”去研究“到一定点与一定直线之间的距离之比为1”的

点的轨迹？可见抛物线定义的引入更是与前面两种引入方式不相一致，难以体现三种圆锥曲线的内在联系。针对这一问题，教师在章首起始课的教学活动中可以通过引入Dandelin球作为从圆锥曲线三维定义向二维定义的过渡的桥梁。Dandelin球很好地解释了圆锥曲线三维定义与二维定义之间的关系，为三种圆锥曲线的定义方式由三维向二维转化提供了方式方法，引导学生体会三种圆锥曲线的内在联系，建立良好认知结构，实现有意义学习。

3.4.2 具体圆锥曲线概念和性质教学

具体圆锥曲线概念和基本性质教学是单元教学中的核心环节，主要针对第二阶段的内容进行设计。在这一环节中教师应充分利用类比和数形结合思想方法，通过对椭圆的学习，类比学习双曲线和抛物线，帮助学生提高迁移学习的水平，掌握学习的方法，避免发生死记硬背的机械学习。由于椭圆和双曲线在知识结构上的相似程度更高，因此可以重组教材的课时顺序，将椭圆和双曲线的标准方程两课组建为一个小单元，椭圆和双曲线的简单几何性质同理，最后单独构建抛物线小单元。学生在类比中学习双曲线和抛物线，旨在引导学生掌握研究平面二次曲线的数形结合思想方法，提高学生的迁移能力，实现由“学会知识”向“学会学习”的转变，促进学生的有意义学习。再结合课标要求和单元教学目标，确定了本章的课时安排。具体课时顺序和课时数安排如表3-5。

表 3-5 《圆锥曲线的方程》单元具体课时安排（约 11 课时）	
教学内容	课时数
章首起始课——初步了解圆锥曲线	1 课时
椭圆及其标准方程	1 课时
双曲线及其标准方程	1 课时
练习课	1 课时
椭圆的简单几何性质	1 课时
双曲线的简单几何性质	1 课时
练习课	1 课时
抛物线及其标准方程	1 课时
抛物线的简单几何性质	1 课时
练习课	1 课时
章末收尾课——圆锥曲线的统一定义	1 课时

3.4.3 章末收尾课

章末收尾课解决第三阶段的问题，其作用是回望来路，发掘圆锥曲线的内在联系，

使单元内容具有整体性，帮助学生完善圆锥曲线部分的认知结构。这一目标可以通过统一离心率概念得到圆锥曲线的统一定义实现。离心率的概念在探究椭圆与双曲线的几何性质时首次出现，被定义为“焦距与长轴长（实轴长）的比”，但抛物线的离心率却定义为“抛物线上的点与焦点的距离和其与准线的距离的比”，这两种定义方式看起来关联不大，如何体现它们的一致性？人教 A 版教材在椭圆小节后设置了统一定义中椭圆的定义方式阅读材料，但在圆锥曲线学习完成后并没有设置后续的阅读材料供学生了解统一定义的全部内容，因此设置一节章末收尾课，用以向学生介绍圆锥曲线的统一定义，解决教材对三种圆锥曲线的离心率定义不一致的问题，加深学生对离心率的理解，帮助学生建立圆锥曲线整体认知结构。

第4章 《圆锥曲线的方程》单元教学设计

在本章,笔者将以2019人教A版普通高中教科书为基础,结合第3章的相关分析,进行促进有意义学习的《圆锥曲线的方程》一章单元教学设计。由于笔者所读为两年专业硕士,只能开展为期半年的教育实习,另外笔者所在的实习班级为高三年级,学习时间紧、任务重,因此无法开展教学实践。笔者仔细研读相关文献,与研究生导师以及实习学校指导老师交流沟通后,提出了如下单元教学设计,期望能为高中数学一线教师提供《圆锥曲线的方程》章节的教学参考。

4.1 具体课时教学设计

4.1.1 章首起始课——初步了解圆锥曲线

一、教学目标

1.知识与技能目标:

(1) 了解圆锥曲线的历史发展,能够说出其在现实中的应用,理解坐标法的数学思想方法,对研究圆锥曲线有大致了解和认识;

(2) 通过构建椭圆的Dandelin球模型,理解椭圆三维定义转化为二维定义过程。

2.能力目标:

经历通过构建Dandelin球将椭圆的三维定义转化为二维定义的过程,培养空间想象能力和逻辑推理能力。

3.情感、态度、价值观:

(1) 感受数学与现实生活的紧密联系,发现数学之美;

(2) 通过观看利用GeoGebra画图工具截取圆锥曲线的过程,体会信息技术能够将复杂的几何问题变直观的强大作用;

(3) 通过列举生活中的圆锥曲线如“嫦娥五号携月球样本返回地球”、“全红婵夺冠”等实例,增强民族自豪感和自信心。

二、教学重难点

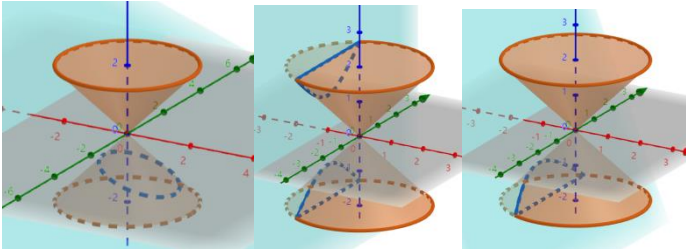
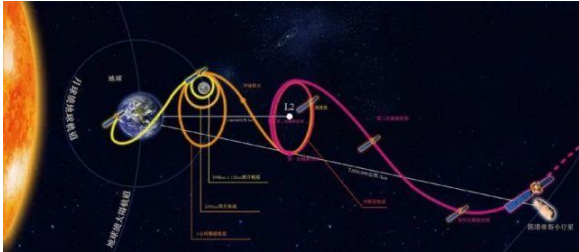
重点: 了解圆锥曲线的起源与应用以及研究圆锥曲线所涉及的基本思想方法;理解利用Dandelin双球模型实现圆锥曲线从三维定义向二维定义过渡的过程。

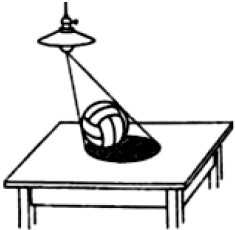
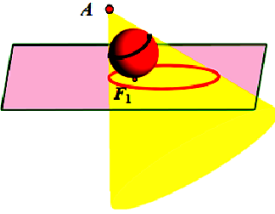
难点: 理解利用Dandelin双球模型实现圆锥曲线从三维定义向二维定义过渡的过

程。

三、教学过程

表 4-1 章首起始课教学设计

教学内容	设计意图
同学们，今天我们一起认识一类曲线——圆锥曲线。早在公元前 4 世纪的古希腊，数学家梅内克缪斯用垂直于圆锥母线的平面截圆锥，在他不断转换角度的过程中发现了三种不同类型的曲线，这就是圆锥曲线的雏形。 到了公元前 3 世纪，古希腊数学家阿波罗尼斯给出了圆锥曲线的原始定义：平面截一个圆锥面得到的交线称为圆锥曲线。老师现在用 Geogebra 软件模拟阿波罗尼斯得到交线的过程（如图 1），请同学们边观察蓝色虚线部分边思考，你是否认识这三种曲线。  图 1 三种曲线分别称为椭圆、双曲线和抛物线。由于它是在三维空间中得到的定义，因此也称为圆锥曲线的三维定义。 同学们在刚才的演示过程中思考的曲线名称是这样吗？其实我们对它们并不陌生，很小的时候我们就认识椭圆，在初中阶段也接触过抛物线和双曲线，那么你能说说它们都体现在生活中的哪些地方吗？ （学生自由发言） 老师这里也有一些例子。月球探测器嫦娥五号携带月球样品返回地球，中国首次地外天体采样任务圆满完成，图 2 是它绕月飞行的运行轨迹，这是什么图形？ （生：椭圆。）  图 2 在东京奥运会中，中国奥运代表团最年轻的运动员全红婵以创纪录的成绩夺得 10 米跳台冠军，图 3 大致模拟了她跳水时的行动轨迹，这类似于哪种曲线？ （生：抛物线。）	通过对圆锥曲线历史的大致介绍，列举生活中的实例，使学生了解数学知识产生的背景，与生活实际结合，呼应课标要求。

广州塔又被称作“小蛮腰”（如图4），它两侧的形状又类似于哪种曲线？（生：双曲线。）   图3 图4 这三种曲线间有怎样的联系？各自又有怎样的特质？有哪些具体的应用？下面我们就一起进入圆锥曲线的学习，相信学过之后你对这些问题会有一定的了解。	
你能否用已经学过的知识来解决以下问题：如果要研究平面曲线，你认为应该研究什么问题？从哪些方面研究？用什么方法研究？ 在《直线和圆的方程》一章，我们已经学习过两种特殊平面图形，一个是直线，一个是特殊的平面二次曲线——圆，研究的内容包括直线和圆的几何特征、方程以及位置关系，学习过程基本是按以下方式展开的：几何特征→定义→建立坐标系→得到曲线方程，其中用到的一个重要方法就是坐标法。那么将直线和圆换成圆锥曲线，我们可以类比研究直线和圆的方式、方法，即运用坐标法来研究圆锥曲线。其中类比和数形结合思想方法将贯穿本单元的整个学习过程，但要注意的是，直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线既有共性、也有特性，在学习的过程中要充分体会类比和分类讨论两种数学思想方法在研讨圆锥曲线中所发挥的作用。	通过类比、联想让学生自然地明了用数形结合思想方法研究圆锥曲线，促进学生形成良好的认知结构。
如果用灯照射桌面上的一个球（如图5），形成的投影是什么图形？（生：椭圆）如果将其抽象为数学模型（如图6），则由灯发出的光束（黄色部分）可以看作圆锥的母线，点F_1为球与椭圆的切点，球内切于圆锥。   图5 图6 同理，在桌面的另一侧也存在一个球切桌面于F_2，同时也内切于圆锥（如图7所示），这个模型叫做 Dandelin 双球模型，两个球同时都内切于圆锥且与椭圆面相切。	借助生活经验帮助学生理解模型，利用 Dandelin 双球模型实现椭圆三维定义到二维定义的转化。

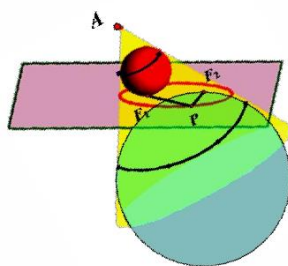


图 7

观察图 7，在椭圆及其内部我们发现两个特殊的点 F_1 、 F_2 ，椭圆上的点是否与这两个点有关系呢？如果有，又有怎样的关系？

我们先单独来看上方的小球（如图 8），连接圆锥顶点 O 和椭圆上任意一点 P ，线段 OP 切球于点 Q_1 ，则 PQ_1 为球的一条切线段； F_1 是截平面与球的切点，因此 PF_1 是球的又一条切线段，因为过球外一点所作球的切线的长都相等，所以 $PQ_1 = PF_1$ 。

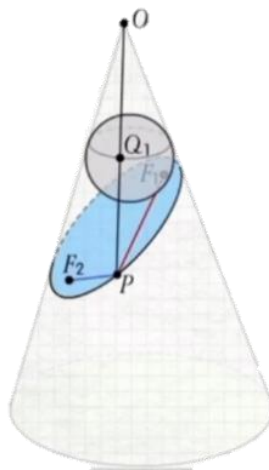


图 8

另一个球同理（如图 9），母线 OP 所在的直线与球切于点 Q_2 ，则 PQ_2 为球的一条切线段； F_2 是截平面与球的切点，因此 PF_2 是球的又一条切线段， $PQ_2 = PF_2$ 。

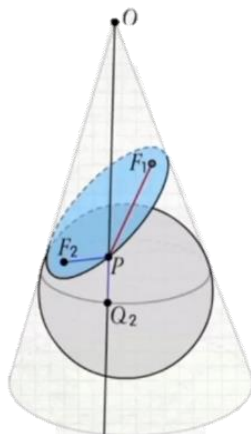


图 9

至此 PF_1 和 PF_2 就转化为了 PQ_1 和 PQ_2 ，而我们可以发现 PQ_1 与 PQ_2 之和为 Q_1Q_2 （如图10）。由于 Q_1 、 Q_2 都在射线 OP 上，且 OQ_1 和 OQ_2 分别为两球的切线段，长度不变，因此 $Q_1Q_2 = OQ_2 - OQ_1$ 为定值，可以得到 $PF_1 + PF_2$ 也为定值。由此得到椭圆的一个性质：椭圆上的点到两个定点的距离之和为定值。这个性质比三维定义更能定性描述椭圆，因此后来的科学家利用这个性质给出了椭圆的定义，也就是我们下节课要学习的椭圆的第一定义（二维定义）。转化过程中所借助的 Dandelin 双球模型同样适用于另外两种圆锥曲线定义的转化。

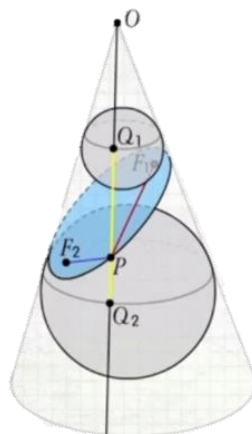


图 10

小结：

本节课我们简单了解、认识了什么是圆锥曲线。通过联系旧知，我们有了研究圆锥曲线的具体方法：坐标法。借助 Dandelin 双球模型，获知了椭圆的重要性质：椭圆上的点到两个定点的距离之和为定值，这就是我们下节课要学习的椭圆的第一定义（二维定义）。

作业：

回顾用 Dandelin 球推导椭圆二维定义的过程，试着用双球模型探究双曲线是否像椭圆那样也存在两个“特殊点”，双曲线上的任意一点到这两个点的距离又有什么关系？小组合作完成。

通过小结回顾所学知识和思想方法，加深学生理解，帮助学生构建知识地图。

4.1.2 椭圆及其标准方程

一、教学目标

1.知识与技能目标：

（1）在章首起始课了解椭圆的基础上，借助“拉线作图”法进一步明确椭圆的第一定义（二维定义），理解和掌握椭圆的第一定义（二维定义）；

（2）通过联系起始课给出的平面曲线的研究思路，主动地思考并得到研究椭圆的方法——数形结合思想方法，据此建立适当坐标系，推导椭圆方程；

(3) 掌握椭圆的标准方程，能够利用其解决简单的问题。

2.能力目标：

经历“拉线作图”的探究活动，培养学生动手操作的能力，促进学生发展发散性和创造性的高阶思维；在椭圆标准方程的建立过程中，使学生学会类比推理，提高学生思考和解决问题的能力。

3.情感、态度、价值观：

(1) 在“拉线作图”法探究椭圆概念的活动中，加强学生主动探索、合作、交流，体验数学的合理性和严谨性；

(2) 在椭圆标准方程的建立过程中，使学生增强克服困难的意志和坚持学习的毅力。

二、教学重难点

重点：掌握椭圆第一定义和焦点位于x轴时对应的椭圆标准方程。

难点：通过引导椭圆标准方程的建立过程，让学生切实体会坐标法和数形结合思想在圆锥曲线学习中所发挥的作用。

三、教学过程

表 4-2 椭圆及其标准方程教学设计

教学内容	设计意图
1.给出章首起始课的 Dandelin 双球模型，引入探究内容 上节课我们通过 Dandelin 双球模型（如图 1）得到了一个等式：$PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2 = Q_1Q_2$，用自然语言描述即为：椭圆上的点到两个定点的距离之和为定值。那么，只要满足“到两个定点的距离之和为定值”的点其轨迹一定为椭圆吗？要画出椭圆是否还需要增加其他的限制条件？接下来我们通过“拉线作图”法对这句话做进一步地认识。 图 1 2.探究活动——“拉线作图”法，帮助学生进一步明确和完善椭圆第一定义 将圆心从一点“分裂”成两点，给你两个图钉，一根棉绳（棉绳不能伸缩），一张白纸，你能根据刚才复习的内容画出椭圆吗？让学生在动手操作时思考下面的	通过“拉线作图”法使学生进一步明确椭圆的二维定义，加强对椭圆的认知。

问题:

①在作图时,测量笔尖到两个图钉的距离之和,你有什么发现?

(生:距离之和为定值。)

②若调节两图钉的相对位置,一是将图钉间的距离缩小至无限接近,二是将图钉间的距离扩大至大于绳长。得到的轨迹有何变化?

(生:缩小到无限接近时其轨迹接近圆,随着图钉间距离的扩大,椭圆越来越扁,当距离大于绳长时动点轨迹不存在。)

由此可以得知,并非只要满足“到两个定点的距离之和为定值”的点其轨迹一定为椭圆,根据三角形两边之和大于第三边,我们得出:动点到两定点的距离之和 n 与两定点间的距离 m 还应满足 $n > m$ 。至此我们可以将前面所得的性质补充完整,得到教材上给出的椭圆的定义,它叫做椭圆的第一定义或二维定义,即:平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆。两个定点 F_1, F_2 叫做椭圆的焦点,两焦点间的距离叫做椭圆的焦距,其一半称为半焦距。

3.建立椭圆标准方程

(1) 建立适当的坐标系

通过上节课的学习我们知道可以用坐标法和数形结合思想研究圆锥曲线,即可以通过方程研究曲线的性质,那么如何建立适当的坐标系得到椭圆的方程呢?由于圆与椭圆有很多相似性,因此具体建系和推导方程的过程,我们可以类比圆来进行(如图2)。

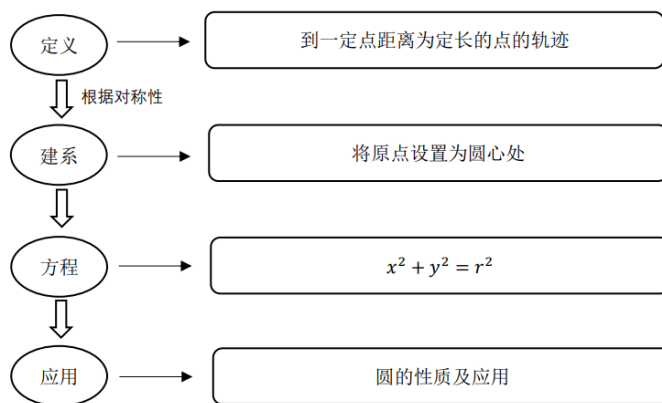


图2

类比圆从定义入手建立坐标系、列出并推导方程的思路,我们同样也从椭圆的定义入手。设 P 为椭圆上的任意一点, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点,因此根据定义可令 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ($2a$ 为大于0的常数);设 P_1 为点 P 关于直线 F_1F_2 的对称点,则有 $|P_1F_1| + |P_1F_2| = 2a$,根据定义可知点 P_1 也在椭圆上,这说明椭圆关于直线 F_1F_2 对称,同理我们也可以得到直线 F_1F_2 的垂直平分线也是椭圆的对称轴。你能得出什么结论?

(生:椭圆是轴对称图形,它有两条对称轴。)

通过椭圆标准方程的建立过程,使学生充分感知和领悟数形结合思想方法。

据此我们该如何建立坐标系呢？

（生：可以以直线 F_1F_2 为 x 轴、以该直线的垂直平分线为 y 轴建立直角坐标系。）（如图3）

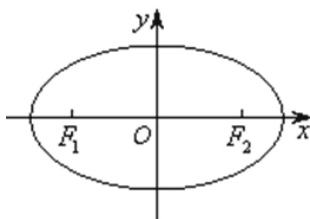


图3

（2）焦点在 x 轴上时对应的椭圆的标准方程

设 $P(x, y)$ 为椭圆上任意一点，还是令 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ ，再令椭圆的焦距 $|F_1F_2| = 2c$ （ $c > 0$ ），由椭圆的对称性易知， $F_1(-c, 0)$ ， $F_2(c, 0)$ （如图4）。

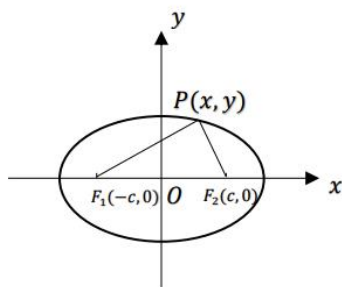


图4

因此

$$|PF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

所以

$$|PF_1| + |PF_2| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

移项得

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

两边平方、整理，得

$$a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

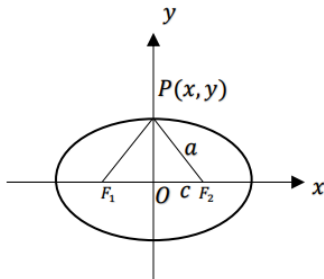
再次平方、整理，得

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2 \quad (4-1)$$

$a^2 - c^2$ 是否可以用更简洁的形式代替？

当椭圆上任意一点 P 移动到椭圆与 y 轴交点位置时，显然， $|PF_1| = |PF_2| = a$ ， $|OF_1| = c$ （如图5），根据勾股定理，在直角三角形 POF_1 中， $|PO| = \sqrt{|PF_1|^2 - |OF_1|^2} = \sqrt{a^2 - c^2}$ 。为方便起见，记 $|PO| = b$ ，则 $\sqrt{a^2 - c^2} = b$ ，则 $a^2 - c^2 = b^2$ 。

因此，（4-1）式可以表示为

$b^2x^2 + a^2y^2 = b^2a^2,$ 两边同时除以a^2b^2, 得 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$ 上式称为焦点在x轴上时对应的椭圆的标准方程。  图 5 (3) 焦点在y轴上对应的椭圆的标准方程 除了刚才这种建立坐标系的方式, 同学们还有其他方式吗? (生: 由于椭圆有两条对称轴, 所以利用对称性我们还可以以直线F_1F_2为y轴、以F_1F_2的垂直平分线为x轴建立平面直角坐标系。) 很好, 其标准方程的推导思路和焦点在x轴上的椭圆的标准方程完全相同, 请同学们课下类比本节课我们所学的知识, 小组合作, 共同推导焦点在y轴上时对应的椭圆的标准方程。	
课本例题 1 课后练习 1, 2	
小结: 1. 以章首起始课介绍过的 Dandelin 双球模型为载体引出“拉线作图”探究活动, 让学生发现椭圆“有扁有圆”, 为下节课学习椭圆的几何性质做了铺垫; 同时通过改变图钉距离让学生意识到椭圆上任意一点到两定点的距离之和并非任意值, 从而完善了椭圆的定义。 2. 通过回顾章首起始课给出的研究平面曲线的基本思路, 启发学生自觉意识到“坐标法”和数形结合思想对研究椭圆所发挥的作用。通过类比圆的研究思路推导出椭圆的一种标准方程, 并能够初步运用其解决问题。	回顾知识与方法, 使学生从整体把握所学知识。

4.1.3 双曲线及其标准方程

一、教学目标

1. 知识与技能目标:

(1) 回顾章首起始课提出的问题, 借助 Dandelin 球将双曲线三维定义转化为二维定义, 通过几何画板的演示继续完善双曲线的二维定义;

(2) 能够类比推导椭圆标准方程的过程，探求并掌握双曲线的标准方程，利用其解决简单问题。

2.能力目标：

在类比学习中，培养合情推理和演绎推理能力；在完善双曲线二维定义的过程中，培养思维严密性。

3.情感、态度、价值观：

- (1) 通过类比学习，体验用数学思想和方法推理、发现数学结论的乐趣。
- (2) 在借助几何画板完善双曲线二维定义时，体会信息技术将抽象问题转化为具体问题的强大作用。

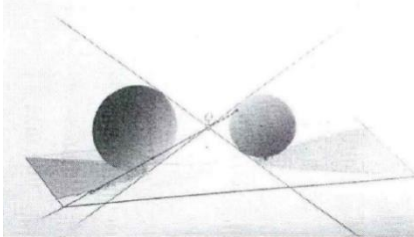
二、教学重难点

重点：双曲线的二维定义及其标准方程的建立。

难点：理解双曲线上的点到两焦点距离之差的绝对值应满足一定的限制条件。

三、教学过程

表 4-3 双曲线及其标准方程教学设计

教学内容	设计意图
1.复习引入 (1) 回顾单元起始课的作业题目 在章首起始课中老师布置了这样一个任务：类比用 Dandelin 球将椭圆三维定义转化为二维定义的过程，用双球模型探究双曲线是否像椭圆那样也存在两个“特殊点”，双曲线上的任意一点到这两个点的距离又有什么关系？ (2) 类比椭圆，构建双曲线 Dandelin 球模型 实际上，如果我们将椭圆 Dandelin 球模型中的点光源下移，即在桌面上放两球，中间置一点光源O，此时两球在桌面上所投影子的边缘就呈现为双曲线（如图 1）。  图 1	联系旧知，使学生体会到即将学习的双曲线内容与椭圆的紧密联系，帮助学生建立整体性思维。
2.探究双曲线二维定义 (1) 类比椭圆，利用 Dandelin 球引出双曲线的二维定义 我们可以将图 1 抽象为如图 2 所示的 Dandelin 球模型。其中O点可以看作图 1 中的点光源O，平面m为桌面，球c_1、c_2与m切于点F_1、F_2，两条曲线为所投影子的边缘，点P为下半支曲线上的任意一点。圆锥的母线模拟了光源所发出的光线，是一组动直线，点A、B是点P所在的母线分别与两球的切点。在椭圆中我们得到一个结论：椭圆	类比椭圆使学生自然地明了双曲线的性质。借助几何画板，

上一点到两定点（两球与椭圆面的切点）的距离之和为定值，现在看看双曲线中 $|PF_1|$ 与 $|PF_2|$ 又有怎样的关系。

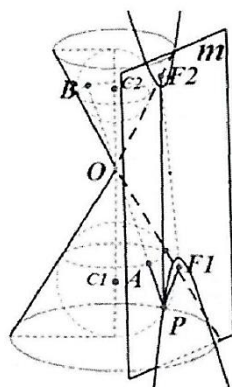


图2

根据切线长相等的性质，得到

$$|PF_2| = |PB|$$

$$|PF_1| = |PA|$$

又点A、B是点P所在的母线分别与两球的切点，因此三点共线，有

$$|PB| = |PA| + |AB|$$

可得

$$|PF_2| = |PF_1| + |AB|$$

整理得

$$|PF_2| - |PF_1| = |AB|$$

同理，当点P位于上半支曲线时可以得到

$$|PF_1| - |PF_2| = |AB|$$

由于 $|AB| = |OA| + |OB|$ 为定值，因此可以得到结论：双曲线就是到两定点 F_1 、 F_2 距离之差的绝对值为常数的点的轨迹。

（2）借助信息技术，完善双曲线的二维定义

利用几何画板作出双曲线的图像（如图3），令线段AB的长度等于点P到 F_1 、 F_2 距离之差的绝对值，在拖动点B的位置改变AB的长度的过程中观察双曲线图像的变化情况。

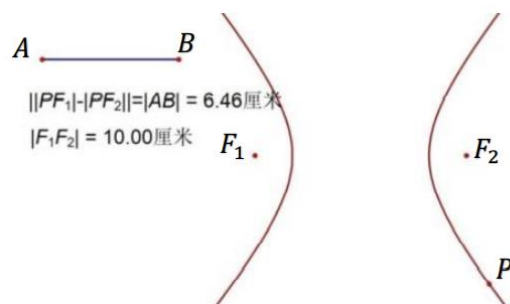


图3

直观地展示双曲线定义应满足的限制条件。

可以看到,由图中位置开始,缩短线段 AB 长度的过程中,双曲线的弯曲程度越来越小,当 $|AB| = 0$ 时,图像变为一条直线(如图4),即 $||PF_1| - |PF_2|| = 0$,根据中垂线定理逆定理,这条直线为线段 F_1F_2 的垂直平分线,说明双曲线上的点到两定点的距离之差的绝对值不能为0。

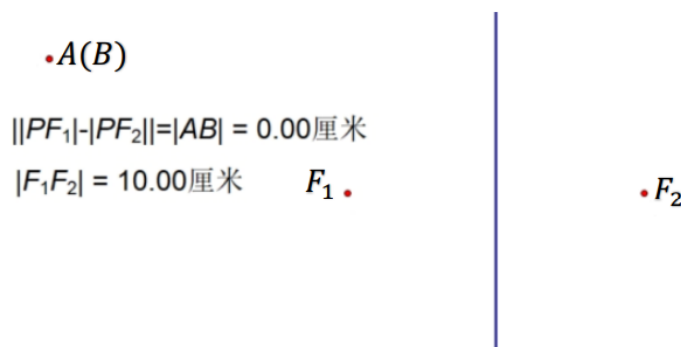


图4

而在增大线段 AB 长度的过程中,双曲线的弯曲程度越来越大,当 $|AB| = |F_1F_2| = 10$ 时,图像变为直线 F_1F_2 (如图5),即 $||PF_1| - |PF_2|| = |AB| = 10$,此时点 P 在线段 F_1F_2 的延长线上,说明双曲线上的点到两定点的距离之差的绝对值不能等于两定点间的距离。

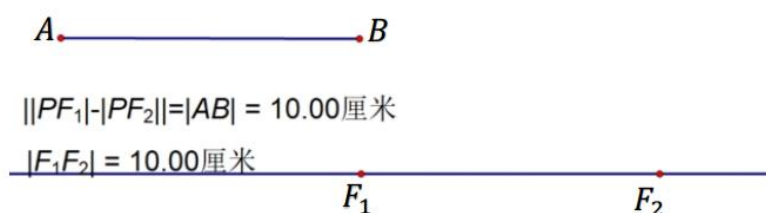


图5

继续增大线段 AB 的长度,当 $|AB| > |F_1F_2|$ 时,根据三角形任意两边之差小于第三边可知,不存在这样的情况,在几何画板中观察也同样发现图像不存在,由此可知,双曲线上的点到两定点距离之差的绝对值不能大于两定点间的距离。

综上,我们归纳出双曲线的严格定义:把平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值等于非零常数(小于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线。这两个定点叫做双曲线的焦点,两个焦点间的距离叫做双曲线的焦距。

3.探究双曲线的标准方程

(1) 焦点在 x 轴上时对应的标准方程

类比上节课建立椭圆标准方程的思路,你认为应该如何推导双曲线的方程?

(生:建立坐标系,用坐标法推导。)

如何建立适当的坐标系?联系椭圆,想想看。

(生:以双曲线左、右焦点 F_1, F_2 所在的直线为 x 轴, F_1, F_2 连线段的垂直平分线为 y 轴,建立坐标系。)

类比椭圆,建立直角坐标系推导双曲线的标准方程,引导学生进一步

(老师根据学生回答出示如图6所示的图片)

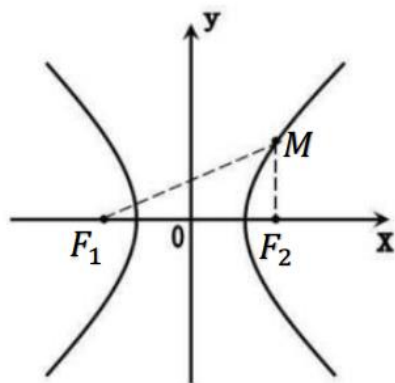


图6

通过前面的学习,你能写出此时双曲线对应的方程吗?

(生:设 $M(x,y)$ 是双曲线上的任意一点,令 M 点到 F_1, F_2 的距离之差的绝对值为 $2a(a > 0)$, $|F_1F_2| = 2c(c > 0)$, 易知 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 。)

下面请同学们小组合作,列出方程并化简。

由双曲线的定义可得:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

去绝对值号,得

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

类比椭圆标准方程的化简过程,要先移项:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

两边同时平方:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

整理可得

$$a^2 - cx = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

上式两边再平方,得

$$a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

化简为

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

即

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

根据双曲线定义,我们知道 $c > a$, 因此 $c^2 - a^2 > 0$ 。类比椭圆标准方程的建立,我们同样可令 $c^2 - a^2 = b^2$, 此时上式可表示为

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$$

此式即为焦点在 x 轴上的双曲线的标准方程。

体验类比、
数形结合
的数学思
想方法。

(2) 焦点在y轴上时对应的标准方程 以直线F_1F_2为y轴、以F_1F_2的垂直平分线为x轴建立平面直角坐标系, 同样能够建立焦点在y轴上双曲线方程, 请同学们课下通过小组合作, 共同完成焦点在y轴上时对应的双曲线的标准方程。	
例题 1 课后练习 1, 2	
小结: 本节课我们用到了一个重要的数学思想方法: 类比。与椭圆类似, 我们借助Dandelin 球得出双曲线的一个重要性质: 双曲线就是到两定点F_1、F_2距离之差的绝对值为常数的点的轨迹。通过直观想象、逻辑推理得出距离之差的绝对值需非零且小于双曲线的焦距, 从而完善了双曲线的定义。接着类比椭圆的研究思路对双曲线进行了“$\xrightarrow{\text{定义}} \xrightarrow{\text{对称性}} \xrightarrow{\text{建系}} \xrightarrow{\text{定义}} \xrightarrow{\text{方程}}$”, 得到焦点在x轴上的双曲线的标准方程为$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$。	回顾课堂所学知识, 明确研究思路。

4.1.4 椭圆的简单几何性质

一、教学目标

1.知识与技能目标:

- (1) 通过直观想象初步推断椭圆几何性质, 并能利用标准方程加以推理证明;
- (2) 掌握椭圆几何性质后解决有关问题。

2.能力目标:

引导学生依据学习《直线与圆的方程》经验自主发现利用坐标法探究椭圆几何性质, 增强学生类比推理能力、运用数形结合以及化归的思想方法解决问题的能力; 通过“先直观观察, 再代数证明”的过程, 提高学生推理论证水平。

3.情感、态度、价值观:

本节课的学习模式主要是“先猜想, 后证明”, 在这个过程中体会数形结合和化归的思想方法, 培养勇于探索的品质, 增强学生学习数学的信心。

二、教学重难点

重点: 能够利用代数运算的方法论证有关椭圆几何性质的猜想, 掌握椭圆简单几何性质。

难点: 能够理解如何用代数方程验证几何直观得到的猜想, 及如何将方程结果转化为几何语言, 体会坐标法在这一部分学习中的重要作用。

三、教学过程

表 4-4 椭圆的简单几何性质教学设计

教学内容	设计意图
1.复习引入 首先对椭圆的定义及其标准方程形式进行复习。 在学习直线与圆的位置关系时,要判断直线与圆是相离、相切还是相交,我们采用了什么方法? (生:坐标法) 使用坐标法的过程可以用三个步骤概括:几何问题转换为代数问题→代数运算与推理→代数结论转化为几何结论。 如果要研究椭圆的几何性质,是否可以借鉴上述方法?	在旧知识的基础上提出新问题,建立新旧知识联系。
2.椭圆的几何性质 你认为可以从哪些方面研究椭圆的几何性质? (生 1: 对称性) (生 2: 顶点。生 3 紧接补充: 范围。) (1) 对称性 观察椭圆的形状,它具有怎样的对称性? (生:它是轴对称图形、中心对称图形。) 能否用椭圆的标准方程证明你的观点? 在椭圆方程$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$中,以$-y$替代$y$,你有什么发现?说明了什么? (生:方程没有发生改变,说明点$P(x, y)$, $P_1(x, -y)$都在椭圆上,两点关于x轴对称。) 你还能提出类似的问题吗?有怎样的结论? (生:用$-x$替代x,方程同样没有改变,说明点$P(x, y)$, $P_2(-x, y)$都在椭圆上,关于y轴对称。) 如果同时以$-x, -y$替代x, y呢? (生:方程依然没有发生改变,说明点$P(x, y)$, $P_3(-x, -y)$都在椭圆上,点P、P_3关于原点中心对称。) 你能得出什么结论? (生:椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$是轴对称图形,有两条对称轴,分别是$x$轴、$y$轴;是中心对称图形,中心对称点是原点。) (2) 顶点 图 1 中椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$上的哪些点比较特殊?你能否写出它们的坐标?	以前后具有逻辑关系的问题激发学生联想、类比、思考,体会数形结合和化归的思想方法,增强主动解决新问题的能力,提高学生在课堂的主体地位,促进有意义学习。

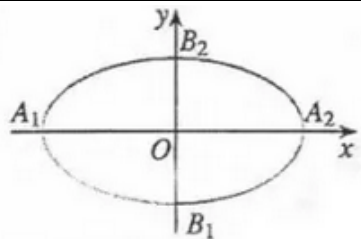


图 1

(生: A_1, A_2, B_1, B_2 比较特殊。)

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中, 令 $x = 0$, 得 $y = \pm b$, 所以 $B_2(0, b)$, $B_1(0, -b)$ 为椭圆与 y 轴的两个交点。同理, 令 $y = 0$, 得 $x = \pm a$, 所以 $A_1(-a, 0)$, $A_2(a, 0)$ 为椭圆与 x 轴的两个交点。因为 x 轴、 y 轴是椭圆的两条对称轴, 所以椭圆与它的对称轴有四个交点 A_1, A_2, B_1, B_2 , 这四个交点叫做椭圆的顶点, 坐标分别为 $(-a, 0)$ 、 $(a, 0)$ 、 $(0, -b)$ 、 $(0, b)$ 。

线段 A_1A_2 、 B_1B_2 分别叫做椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的长轴和短轴, 根据刚才得出的坐标容易看出, 它们的长分别为 $2a$ 和 $2b$, 其中 a 和 b 分别叫做椭圆的长半轴长和短半轴长。

(3) 范围

观察图 2, 容易看出椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的点都在一个特定的矩形内。根据刚才的学习, 大胆推测椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上的点坐标的取值范围是多少?

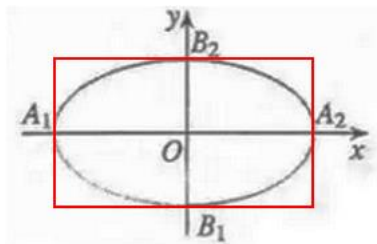


图 2

(生: $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ 。)

下面我们用代数方法进行论证。

由方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 可知,

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \geq 0$$

所以椭圆上点的横坐标都满足不等式

$$\frac{x^2}{a^2} \leq 1$$

即

$-a \leq x \leq a$ 同理, $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 即 $-b \leq y \leq b$ 这说明椭圆位于直线$x = \pm a$和直线$y = \pm b$围成的矩形框里。 (4) 离心率 在学习椭圆定义时我们进行了“拉线作图”的探究活动, 试着改变了图钉间的距离, 一是将图钉间的距离缩小至无限接近, 二是将图钉间的距离扩大。同学们还记得得到的轨迹是如何变化的吗? (生: 图钉间的距离缩小到无限接近时其轨迹接近圆, 随着图钉间距离的扩大, 椭圆越来越扁。) 实际上, 如果我们保持图钉间的距离不变, 改变绳子的长度, 也能够改变椭圆的扁平程度。下面请同学们拿出课前准备好的白纸、图钉和几根长度不等的棉线(棉线不可伸缩)。 下面同桌之间合作, 保持图钉间距离不变, 仅改变棉绳的长度, 你画出的图形有何特点? (生: 绳子的长度越接近图钉间距离, 椭圆越扁; 绳子的长度越大于图钉间距离, 椭圆越接近圆。) 图钉间的距离模拟了椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$中的哪个量? (生: $2c$) 棉绳的长度模拟了哪个量? (生: $2a$) 如果将a和c作商, 比值$\frac{c}{a}$就叫做椭圆的离心率, 用e表示, 即$e = \frac{c}{a}$, 它用来刻画椭圆的扁平程度。 离心率的取值为何有上述变化? 你能否类比这节课所学的坐标法进行解释? (生: 在a与c逐渐接近的过程中, e的值越来越接近 1, 此时$b = \sqrt{a^2 - c^2}$越来越小, 所以椭圆越来越扁; 反之, 在a比c越来越大的过程中, e越来越接近 0, b与a越来越接近, 椭圆越接近圆。) 如果c为 0, 你有什么发现? (生: 当$c = 0$时, 说明椭圆的两个焦点重合, 因此变为半径为a的圆。)	
例题 1, 2 课后练习 1	
小结: 这节课我们主要学习了椭圆的简单几何性质。类比利用直线和圆的方程研究其几何性质, 我们发现可以通过椭圆标准方程研究椭圆的几何性质, 包括其对称性、顶点、	引导学生 总结归纳 知识点和

范围和离心率等。其中用到的一个重要方法就是“坐标法”，在研究中我们经历了“先用几何的眼光观察，再用代数的方法解决，最后将代数语言转化为几何语言”的过程，切实感受到了数形结合和化归的数学思想方法。	研究思路。
---	-------

4.1.5 双曲线的简单几何性质

- 一、教学目标
- 1.知识与技能目标：
通过类比椭圆，先直观考察，再结合标准方程推理论证，得出双曲线的几何性质，并能用其解决简单问题，充分体会数形结合和化归的思想方法。
- 2.能力目标：
给学生学习更大的自主性，提高学生运用数形结合和化归思想方法解决问题的能力；在利用几何画板演示的过程当中，使学生更加熟悉信息技术的应用。
- 3.情感、态度、价值观：
在类比学习的过程中，体验圆锥曲线的内在联系；体会信息技术将抽象问题变直观的强大作用。
- 二、教学重难点
- 重点：探讨并掌握双曲线的几何性质。
- 难点：感悟使用数形结合和化归的思想方法研究双曲线的几何性质。
- 三、教学过程

表 4-5 双曲线的简单几何性质教学设计

教学内容	设计意图
1.复习引入 (1) 复习双曲线的定义及其标准方程形式。 (2) 上节课我们学习了椭圆的简单几何性质，我们是从哪几个方面研究的？ (生：对称性、顶点、范围、离心率) 运用什么方法？ (生：坐标法) 这节课我们学习双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的几何性质，你有研究思路了吗？应该具体研究哪些方面？双曲线还有其他性质吗？	联系旧知，激发学生思考兴趣，同时建立新旧知识联系。
2.双曲线的几何性质 (1) 对称性 观察课本上这组双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ，它具有怎样的对称性？ (生：它是轴对称图形、中心对称图形。)	类比椭圆学习双曲线的几何性质，体会

能否用双曲线的标准方程证明你的观点？

(生 1: 当用 $-y$ 替代 y 时, 方程没有发生变化, 说明关于 x 轴对称的点 $P(x, y), P_1(x, -y)$ 都在双曲线上, 即双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 关于 x 轴对称。)

谁还有补充？

(生 2: 当 $-x$ 替代 x 时, 方程同样不改变, 关于 y 轴对称的点 $P(x, y), P_2(-x, y)$ 都在双曲线上, 说明双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 还关于 y 轴对称。)

(生 3: 用 $-x, -y$ 替代 x, y , 方程依旧没有改变, 说明关于原点对称的点 $P(x, y), P_3(-x, -y)$ 都在双曲线上, 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 是关于原点中心对称的图形。)

(2) 顶点

图 1 中双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的哪些点比较特殊？你能否写出它们的坐标？

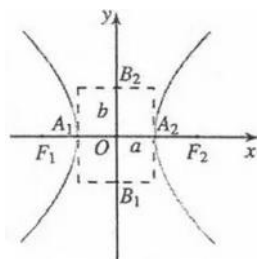


图 1

(生: A_1, A_2 比较特殊。)

在双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 中, 令 $y = 0$ 得 $x = \pm a$, 所以 $A_1(-a, 0), A_2(a, 0)$ 为椭圆与 x 轴的两个交点。 A_1, A_2 称为双曲线的顶点。

令 $x = 0$, 得 $y^2 = -b^2$, 这个方程没有实数解, 说明双曲线和 y 轴没有公共点, 但我们也把 $B_1(0, -b), B_2(0, b)$ 两点画在 y 轴上 (如图 1)。

线段 A_1A_2 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的实轴, 长为 $2a$, a 叫做双曲线的实半轴长; 线段 B_1B_2 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的虚轴, 长为 $2b$, b 叫做双曲线的虚半轴长。

(3) 范围

观察图 1, 根据刚才的学习, 请同学们大胆推测双曲线的范围是多少？

(生: $x \leq -a$ 或 $x \geq a, y \in R$)

下面我们用代数方法论证。

由方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 知,

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2}$$

数形结合和化归的思想方法。小组合作的方式增加了学习形式, 增强了学生交流合作的能力。

因此

$$\frac{x^2}{a^2} \geq 1$$

即双曲线上的点的坐标 (x, y) 都适合不等式 $\frac{x^2}{a^2} \geq 1, y \in R$, 即

$$x^2 \geq a^2, y \in R$$

所以双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的范围是 $x \leq -a$ 或 $x \geq a, y \in R$ 。

(4) 离心率

在上节课的学习中, 我们知道了椭圆离心率范围在 0 到 1 之间; 越接近 0 时, 椭圆越圆, 越接近 1 时, 椭圆越扁。与椭圆类似, 双曲线也有离心率, 同样也表示为 $e = \frac{c}{a}$, 你能说出双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 离心率的取值范围吗?

(生: 因为 $c > a > 0$, 所以 $e > 1$ 。)

双曲线的离心率又能刻画怎样的几何特征? 请同学们观察老师的操作。

图 2 为老师利用几何画板设计的双曲线, $2a$ 表示实轴长, $2c$ 表示焦距。现在老师保持 $2a$ 不变, 让 $2c$ 接近 $2a$, 图中的双曲线有怎样的变化? 此时 e 的值如何?

(生: 双曲线的开口变窄了, 并且越来越靠近 x 轴。 e 越来越接近 1。)

现在老师让 $2c$ 越来越大, 双曲线又发生了怎样的变化? 此时 e 的值又如何?

(生: 双曲线的开口越来越宽, 越来越远离 x 轴。 e 的值越来越大。)

你得到了怎样的结论?

(生: 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率可以刻画其曲直程度, 离心率越接近 1, 其弯曲程度越大; 离心率比 1 越大, 其弯曲程度越小。)

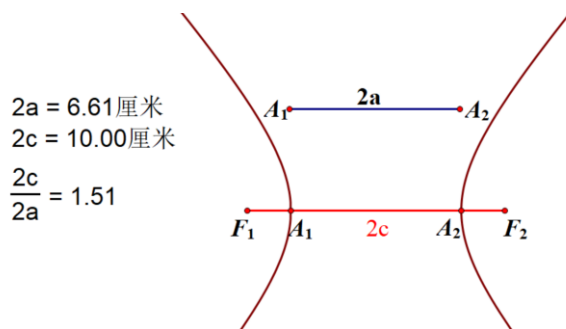


图 2

(5) 渐近线

对于双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 有两条直线很特殊, 它们是 $y = \pm \frac{b}{a}x$, 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线 (如图 3 所示), 之所以叫这个名字是因为这两条直线与双曲线无限接近却不相交。

接下来, 老师在双曲线在第一象限的部分上任选一点 M , 作 MK 垂直于直线 $y =$

$\frac{b}{a}x$ ，垂足为 K 。现在老师向 x 轴正方向移动 M 点的位置，观察线段 KM 的长度，你有什么发现？

（生：线段 KM 长度越来越小，但恒大于 0。）

这就意味着，在第一象限内随着 x 值的增大，直线 $y = \frac{b}{a}x$ 越来越接近双曲线，但不相交。

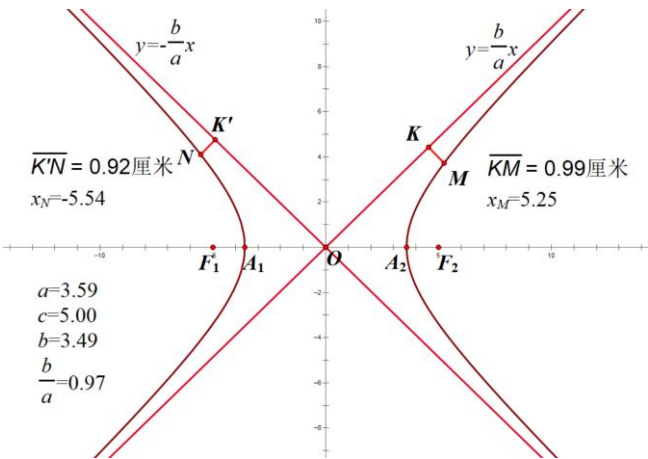


图 3

同样的方法，老师在双曲线在第二象限的部分上任选一点 N ，作 NK' 垂直于直线 $y = -\frac{b}{a}x$ ，交点为 K' 。现在老师向 x 轴负方向移动 N 点的位置，观察线段 $K'N$ 长度，你有什么发现？

（生：线段 $K'N$ 的长度变小，但恒大于 0。）

这就意味着，在第二象限内随着 x 值的减小，直线 $y = -\frac{b}{a}x$ 也越来越接近双曲线，但不相交。

根据刚才的学习，请同学们小组合作，讨论渐近线与双曲线的距离在第三、四象限的情况，选出一位代表到讲台上进行演示。

$y = \pm \frac{b}{a}x$ 叫做双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的渐近线。当 $a = b$ 时，渐近线方程为 $y = \pm x$ ，实轴和虚轴相等，此时的双曲线称为等轴双曲线。

例题 1

课后练习 2，4

小结：
本节课主要学习了双曲线的简单几何性质，包括对称性、顶点、范围、离心率和渐近线，基本类比椭圆的几何性质进行，渐近线是双曲线一个比较特殊的性质。探究经历了“几何观察→代数方程→几何性质”的研究过程，同样体会其中所涉及的数形结合和化归的重要数学思想方法。

回顾知识
点和研究
思路,掌握
研究此类
问题的方
法。

4.1.6 抛物线及其标准方程

- 一、教学目标
- 1.知识与技能目标：

(1) 借助 Dandelin 球模型，将抛物线的三维定义转化为二维定义，并掌握其二维定义（也叫第一定义）；

(2) 能够类比椭圆、双曲线的学习，建立适当的坐标系，推导抛物线的标准方程；

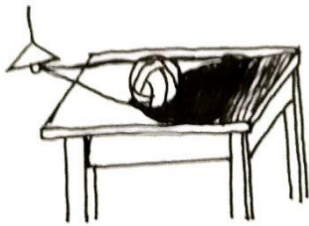
(3) 了解圆锥曲线的光学性质及在现实生活中的应用。
- 2.能力目标：

通过经历类比椭圆、双曲线得出研究思路的过程，提高合情推理与演绎推理能力。
- 3.情感、态度、价值观：

在了解圆锥曲线光学性质的过程中，感受数学从生活中来又回归到生活中去的过程，增强对数学学习的兴趣，感受三种圆锥曲线的密切联系。
- 二、教学重难点
- 重点：掌握抛物线的第一定义，能够通过类比推导抛物线的标准方程。

难点：借助 Dandelin 球将抛物线三维定义转化为二维定义。
- 三、教学过程

表 4-6 抛物线及其标准方程教学设计

教学内容	设计意图
1.抛物线第一定义 这节课我们一起学习抛物线的第一定义及标准方程。通过前面的学习，你能否提出得到抛物线第一定义的方法呢？ 实际上，如果椭圆 Dandelin 球模型中的点光源下移，使其顶部光线与桌面恰好平行（如图 1），就能够得到抛物线 Dandelin 球模型，此时形成的阴影边界即为抛物线。类比椭圆双球模型的构建过程，我们可以把灯发出的光束看作圆锥的母线，球内切于圆锥且与桌面切于一点。  图 1	类比建立椭圆、双曲线 Dandelin 双球模型推导二维定义的过程，引导学生建立新旧知识间的联系，从整体把握本章内容。

将其抽象为数学模型则如图2所示,桌面抽象为平面 α ,灯发出的最顶部光线抽象为圆锥的母线 OC ,由条件得 $OC \parallel \alpha$,球与面 α 相切于点 F ,球与圆锥相切所得的圆在平面 β 内, $\beta \cap \alpha = l$ 。点 P 为抛物线上的任意一点,过点 P 作平面 γ 平行于平面 β , $OC \cap \gamma = C$,母线 OP 、 OC 分别与球相切于点 Q 、 B 。连接 PF ,作 $PA \perp l$, $FD \perp l$ 。

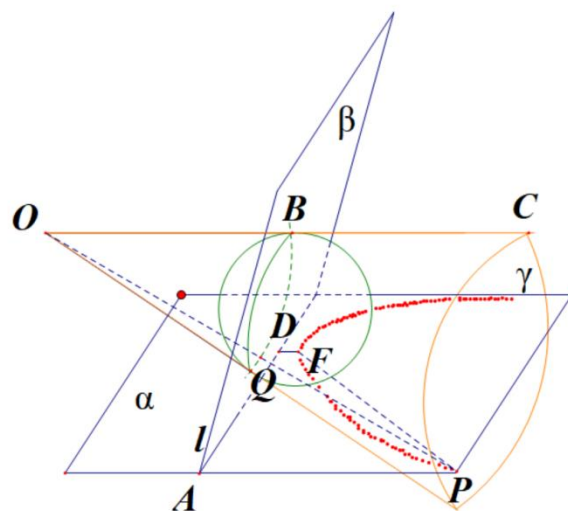


图2

PF 、 PQ 是球的切线,与椭圆和双曲线一样,同样由切线长定理得, $PF = PQ$ 。

圆锥的母线 PO 、 CO 被两个平行平面 β 、 γ 所截,得到两条截线 PQ 、 CB ,因此有 $PQ = CB$ 。

因为 FD 、 PA 都垂直于直线 l

因此有

$$PA \parallel FD$$

又因为 $FD \parallel CB$,

所以

$$PA \parallel CB$$

则

$$PA = CB$$

经过一系列的转换我们最终可以得到 $PF = PQ = CB = PA$,这说明抛物线上任意一点 P 到点 F 的距离等于到直线 l 的距离。这个性质将抛物线的定义方式从三维空间转化到了二维空间,因此由它产生的抛物线的定义也叫做抛物线的二维定义(或称为第一定义),即:平面内与一个定点 F 和一条定直线 l 距离相等的点的轨迹叫做抛物线,点 F 叫做抛物线的焦点,直线 l 叫做抛物线的准线。

2.圆锥曲线的光学性质

在现实生活中,除了章首起始课中我们提到过的运动员在跳水时形成的轨迹,你还见到抛物线有哪些应用?(学生自由讨论。)

紧扣课标
要求,引
导学生体

光线经由抛物线的焦点处能被发散或聚合，这就是抛物线的光学性质（如图3）。抛物线的光学性质在生活中有非常广泛的运用，如汽车远光灯利用了抛物面能发散光线的性质（如图4）、太阳灶则利用了抛物面能聚合光线的性质（如图5）等。

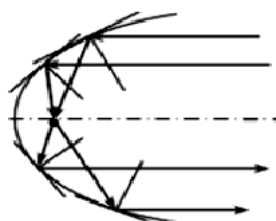


图3

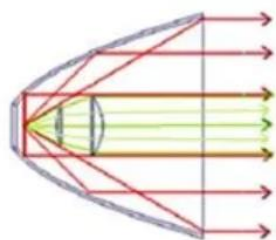


图4

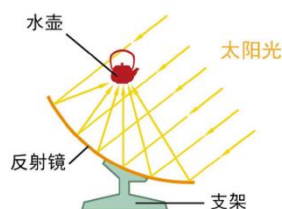


图5

实际上，椭圆与双曲线也同样具有光学性质，请同学们观看老师提供的视频，做进一步了解。

3. 抛物线的标准方程

(1) 推导抛物线的标准方程

与之前我们获得椭圆和双曲线标准方程方式方法一样，我们仍然先对抛物线建立适当的坐标系：取过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 x 轴，垂足为 K ，线段 KF 的中垂线为 y 轴建立坐标系（如图6）。

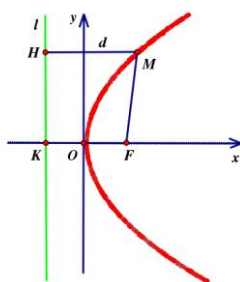


图6

类比椭圆和双曲线，我们同样通过定义推导抛物线的标准方程。

设 $KF = p$ ，则点 F 的坐标为 $(\frac{p}{2}, 0)$ ，直线 l 的方程为 $x = -\frac{p}{2}$ 。

设点 $M(x, y)$ 是抛物线上任一点，由定义可得：

会圆锥曲线与现实生活的联系，提高数学学习兴趣；同时能够感受圆锥曲线的内在联系。

类比椭圆双曲线的研究方法，通过建立恰当直角坐标系推导出抛物线的标准方程，仍然使学生体验类比与数形结合的数学思想方法。

$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=|x+\frac{p}{2}|$$

两边平方得：

$$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

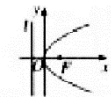
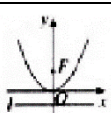
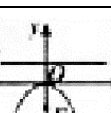
去括号、移项，化简得：

$$y^2=2px$$

上式即为开口向右、焦点在*x*轴上的抛物线的标准方程，对应的焦点为($\frac{p}{2}$,0)，准线为*x* = - $\frac{p}{2}$ 。

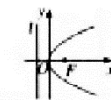
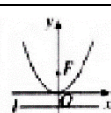
刚才我们探究了抛物线开口向右的标准方程形式，那么它是否也如椭圆、双曲线一样，有其他的标准方程形式呢？请同学们类比刚才的推导过程以两个小组为单位，将下表第二、三、四行填写完整（如表 1）。

表 1

图形	标准方程	焦点坐标	准线方程
			
			
			
			

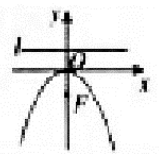
根据同学们的探究结果，我们将表 1 补充完整（如表 2）。

表 2

图形	标准方程	焦点坐标	准线方程
	$y^2=2px$	$(\frac{p}{2},0)$	$x=-\frac{p}{2}$
	$y^2=-2px$	$(-\frac{p}{2},0)$	$x=\frac{p}{2}$
	$x^2=2py$	$(0,\frac{p}{2})$	$y=-\frac{p}{2}$

59

中国知网 <https://www.cnki.net>

		$x^2 = -2py$	$(0, -\frac{p}{2})$	$y = \frac{p}{2}$	
例题 1, 2 课后练习 2					
小结:	本节课通过抛物线 Dandelin 球模型, 得出了抛物线的二维定义。了解了圆锥曲线的光学性质以及实际应用。与椭圆和双曲线标准方程的推导过程类似, 抛物线标准方程的推导同样经历了 “定义 $\xrightarrow{\text{对称性}}$ 建系 $\xrightarrow{\text{定义}}$ 方程 ” 的过程, 得到了焦点在 x 轴、开口向右的抛物线的标准方程 $y^2 = 2px$, 通过小组合作, 利用类比学习的方法得到了抛物线的其他几种标准方程形式。				

总结知识
点和知识
发生过程,
梳理知识脉
络。

4.1.7 抛物线的简单几何性质

一、教学目标

1.知识与技能目标:

- (1) 能够类比椭圆和双曲线自主思考研究抛物线几何性质的方法;
- (2) 掌握抛物线的几何性质, 能利用其解决简单问题。

2.能力目标:

在利用代数方法论证有关几何性质猜想的过程中, 进一步提高运用坐标法解决几何问题的能力, 增强自主学习能力。

3.情感、态度、价值观:

在本节课中, 教师给予学生更多的自主性, 提高学生的课堂参与度, 增强学生探索问题的兴趣和解决问题的乐趣。

二、教学重难点

重点: 掌握抛物线简单几何性质。

难点: 由于抛物线在定义方式和标准方程的形式上较为特殊, 因此对于几何性质的探讨不能完全类比椭圆和双曲线进行, 本节课的难点在于掌握抛物线的简单几何性质。

三、教学过程

表 4-7 抛物线的简单几何性质教学设计

教学内容	设计意图
1.复习抛物线的定义和四种标准方程形式。	通过复习引入唤醒学生思维。
2.抛物线的几何性质 在前面的学习中,我们借助椭圆和双曲线的标准方程研究了它们的几何性质。这节课,我们用同样的方法,利用抛物线的标准方程$y^2 = 2px$,从对称性、顶点、范围和离心率这几个方面探讨它的几何性质。 (1) 对称性 观察抛物线$y^2 = 2px$的形状(如图1),它具有怎样的对称性? (生:它是关于x轴对称的轴对称图形。) 图 1 如何论证? (生:在方程$y^2 = 2px$中,用$-y$替代y,仍得$y^2 = 2px$,说明点$(x, y), (x, -y)$都在抛物线上,即对于抛物线上任一点(x, y),一定存在一个点$(x, -y)$也在此抛物线上,这两点关于x轴对称,因此抛物线是关于x轴对称的轴对称图形。) (2) 顶点 抛物线$y^2 = 2px$中是否也有特殊的点? (生:根据初中学习的知识,抛物线有顶点。在抛物线$y^2 = 2px$中顶点就是与其对称轴的交点。) 显然,对于方程$y^2 = 2px$,当$y = 0$时,$x = 0$,即抛物线$y^2 = 2px$的顶点位于坐标原点上。 (3) 范围 观察开口向右的抛物线的图像,请你大胆推测抛物线$y^2 = 2px$上的点坐标的取值范围。(生:$x \geq 0, y \in R$) 如何论证? (生:在抛物线标准方程$y^2 = 2px(p > 0)$中,由于$p > 0, y^2 \geq 0$,所以$x \geq 0$,抛物线$y^2 = 2px(p > 0)$上的点都在第一、二象限,因此抛物线$y^2 = 2px(p > 0)$上的点的纵坐标取值范围为$(-\infty, +\infty)$,横坐标取值范围为$[0, +\infty)$。) 下面请同学们小组讨论,开口向左、向上、向下的抛物线的取值范围又是怎样的。	教师通过问题串不断引发学生向更深层次思考,增强学生自主学习能力。

(4) 离心率 在椭圆和双曲线中，我们用比值$e = \frac{c}{a}$表示它们的离心率，在抛物线中同样也有离心率，但定义方式不同：抛物线上的点M与焦点F的距离和点M到准线的距离d的比$\frac{ MF }{d}$，叫做抛物线的离心率，用e表示。联系抛物线的定义很容易可以得到，抛物线的离心率$e = 1$。 回忆我们学过的椭圆的离心率，其取值范围为$(0,1)$，双曲线离心率的取值范围为$(1,+\infty)$，今天我们学习的抛物线离心率的取值为 1。你有什么发现？这三种圆锥曲线之间存在着怎样的内在联系？同学们可以课下交流思考，我们下节课揭晓答案。	以离心率为出发点抛出问题引发学生思考,便于后面归纳圆锥曲线的统一定义。
例题 4, 5 练习 2	
小结： 本节课主要学习了抛物线的简单几何性质，对比前面椭圆和双曲线的学习，抛物线几何性质除离心率的定义有些微差别外，其余探究思路与椭圆、双曲线基本一致。在课堂的最后从三者离心率的取值范围入手，提出三种圆锥曲线之间存在着怎样的内在联系问题，为下节课的学习做好铺垫。	在回顾本节课所学内容的基础上引出下节课要探究的问题,加强知识间的联系。

4.1.8 章末收尾课——圆锥曲线的统一定义

- 一、教学目标
- 1.知识与技能目标：

能够推导并掌握圆锥曲线的统一定义（第二定义）。
- 2.能力目标：

在小组合作验证猜想的过程中，增强学生合作意识，提高自主解决问题的能力；感受类比方法在数学中的运用，提高学生的学习迁移能力。
- 3.情感、态度、价值观：

体会圆锥曲线的内在联系以及离心率概念的一致性，对圆锥曲线形成更为整体的认识；在小组合作的过程中，体验共同解决问题的乐趣。
- 二、教学重难点
- 重点：

从离心率视角了解圆锥曲线的统一定义，理解统一定义中离心率的取值决

定圆锥曲线的类型，感受圆锥曲线的内在联系。

难点：本节课的难点在于如何统一三种圆锥曲线离心率概念，即如何探寻椭圆、双曲线及抛物线的离心率统一表达式。由于学生不易把握统一表达式等价变形的方向，因此可以先以椭圆右焦点为例由教师逐步引导学生思路，后由学生以小组合作的形式类比验证关于椭圆左焦点以及双曲线的猜想，解决难点问题。

三、教学过程

表 4-8 章末收尾课教学设计

教学内容	设计意图
上节课老师留了一道思考题给大家，椭圆、抛物线、双曲线的离心率的取值范围分别为$(0,1)$，1，$(1,+\infty)$，可见，离心率的取值会影响到圆锥曲线的类型。通过上节课的学习我们知道，离心率取1时所代表的含义是：抛物线上任意一点M到其焦点F的距离和到准线的距离之比为1。那么离心率取$(0,1)$时，是否也能表示为：椭圆上的点P到其中一个焦点（由于椭圆具有对称性，因此不妨假设为右焦点F）的距离和点P到一条定直线l的距离之比呢？	由旧知引入，帮助学生建构知识间的联系；以问题的形式刺激学生进行思考，促进有意义学习。
你将采用什么方法来验证上面的猜想？ （生：我认为可以类比推导抛物线标准方程的过程，先建系，再设点，后列式、化简，来验证椭圆、双曲线是否也满足这个特点。） 下面先由教师引导学生共同讨论椭圆的情况。 我们仍采用之前对椭圆标准方程的建系方式，以椭圆两个焦点F_1、F_2连线段的中点为原点，F_1、F_2所在直线为x轴，以线段F_1F_2的垂直平分线为y轴，建立平面直角坐标系（如图1）。 图1 下面设点：设椭圆上任意一点$P(x,y)$，左焦点$F_1(-c,0)$，右焦点$F_2(c,0)$。 列式：由$PF_1 + PF_2 = 2a(a > c)$可得， $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \quad (4-2)$ 移项、两边平方得：	由教师引导，共同解决难点问题，后由学生类比学习，提高学生迁移能力。

$$4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 = (x+c)^2 + y^2$$

化简上式得:

$$cx = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (4-3)$$

可以看到, (4-3) 式右边已经出现了点 P 到右焦点 F_2 的距离: $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, 于是我们可以朝着使等式的一边只有 $\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ 的方向继续化简, 为寻找它与点 P 到定直线的距离的比值做好准备, (4-3) 式可等价变形为:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x \quad (4-4)$$

由于猜想是椭圆上的点 P 到右焦点的距离和点 P 到一条定直线 l 的距离的比为离心率 $e = \frac{c}{a}$, 因此不妨将 (4-4) 式右端提取公因式 $\frac{c}{a}$, 得到:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}(\frac{a^2}{c} - x) \quad (4-5)$$

将 (4-5) 式移项得:

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\frac{a^2}{c} - x} = \frac{c}{a} \quad (4-6)$$

由 (4-6) 式我们就获得了类比猜想所要验证的结论: 椭圆上任意一点 P 到右焦点的距离和点 P 到定直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 的距离的比为 $e = \frac{c}{a}$ 。

问题: 如果换作左焦点呢? 请同学们仿照刚才的思路小组合作探究, 如果换作左焦点, 结论是否还成立?

学生动笔计算后发现, 计算结果为:

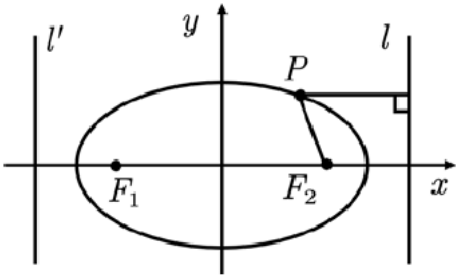
$$\frac{\sqrt{(x+c)^2 + y^2}}{\frac{a^2}{c} + x} = \frac{c}{a} \quad (4-7)$$

得出结论: 椭圆上任意一点 P 到左焦点的距离和点 P 到定直线 $x = -\frac{a^2}{c}$ 的距离的比为 $e = \frac{c}{a}$ 。

(4-6)、(4-7) 两式可以统一成一个表达式:

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\left|\frac{a^2}{c} - x\right|} = \frac{c}{a}$$

综上可得出如下结论: 椭圆上的点到焦点的距离与到定直线 $x = \pm \frac{a^2}{c}$ 距离之比为定值 $\frac{c}{a}$, 也就是离心率 e ($0 < e < 1$), 图像可表示为图 2。

 图 2 思考：双曲线是否也有类似的结论？请同学们类比上述过程，男同学探究双曲线上的点到左焦点的距离与到定直线距离的比值是否为离心率，女同学探究双曲线上的点到右焦点的距离与到定直线距离的比值是否为离心率。 学生们发现双曲线上的点也满足等式 $\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left \frac{a^2}{c}-x\right }=\frac{c}{a}$ 此时离心率$e=\frac{c}{a}>1$。	
由以上我们得到圆锥曲线的统一定义：平面内到一个定点F和到一条定直线l（F不在l上）的距离之比等于常数e的点的轨迹为圆锥曲线。定点F为焦点，定直线l为该圆锥曲线的准线，常数e是该圆锥曲线的离心率。当$0 < e < 1$时，表示椭圆；当$e = 1$时，表示抛物线；当$e > 1$时，表示双曲线。	
小结： （1）圆锥曲线的离心率是一个数，然而离心率却决定和影响着圆锥曲线的形状和类型。 （2）研究的思路：由上节课给出的思考题引入新课，提出猜想：离心率取(0,1)时能表示为：椭圆上的点P到其中一个焦点（由于椭圆具有对称性，因此不妨假设为右焦点F）的距离和点P到一条定直线l的距离的比。经过推理验证，猜想成立。接着用类比的数学方法验证了取椭圆左焦点时猜想同样成立，双曲线也满足任意一点到焦点的距离方程能化简为与离心率有关的统一形式： $\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left \frac{a^2}{c}-x\right }=\frac{c}{a}$ 得出圆锥曲线的统一定义。 作业： 课后绘制自己关于《圆锥曲线的方程》一章的思维导图（形式不限）。	重视研究思路的梳理，强调数学思想与方法在教学中的运用。

4.2 教学评价与反思

根据吕世虎提出的数学单元教学设计流程,在实施教学后应当对学生的学习效果进行评价,根据评价结果对内容选择、目标确定以及流程规划等进行反思、调整和修改。但由于笔者未能实施上述设计,因此无法进行这一环节的教学活动。

4.3 促进有意义学习的高中数学单元教学策略

4.3.1 构建先行组织者,由“学会知识”向“学会学习”转变

由于新知识与学习者已有的认知结构之间存在差异,奥苏贝尔提出了“先行组织者”的概念,用以解决两者之间差异的衔接问题。它是指先于问题解决或材料学习呈现的一种陈述性的或比较性的引导性材料^[52]。先行组织者通常用于较为复杂的学习任务中,因此,它对于高中数学的学习有着十分重要的意义。

先行组织者可以用于一个单元开始前,也可以用于一节课、一个问题前,在单元教学中关注先行组织者,不仅是为了建立新旧知识间的联系,还是为了在联系中指导学生建立对新知识更深层次的认知,引导学生更好地发生学习迁移,从根本上助力学生由“学会知识”向“学会学习”转变,促进有意义学习的发生。在对单元内容设计时,可以从以下几个角度出发进行先行组织者的构建:将旧知识作为先行组织者,促进学生建立新旧知识间的联系;将生活实际作为先行组织者,提高学生发现问题、提出问题、分析和解决问题的能力;将数学基本思想作为先行组织者,引领学生思考方向。

在《圆锥曲线的方程》单元教学设计时,笔者认为,用坐标法将几何问题转化为代数问题是解析几何的根本思想,能够在数形结合思想的指导下研究圆锥曲线的几何性质、解决简单问题是本章的目标;同时,圆锥曲线作为平面解析几何在高中数学中的重要部分,其基础是以直线和圆为代表的简单几何图形,因此可以以《直线与圆的方程》一章的知识结构为载体,将数学基本思想(本章是将几何对象用代数形式表示)作为先行组织者在单元起始课中呈现,引导学生明确问题研究的基本方向,形成相关内容研究的思维框架和具体方法,由“学会知识”向“学会学习”转变,激发学生思维,促进良好认知结构的发展,实现有意义学习。

4.3.2 视角高站位,促进学生良好认知结构的发展

数学单元教学需要教师从更高的整体性视角出发,更多地关注教学内容的本质和其

中蕴含的数学思想方法,以发现事物间的内在关联,使教学中的各要素产生整体效益,帮助学生构建良好的认知结构,减少以往过多地关注知识点而造成学生认知结构割裂的现象。在具体的单元设计时,教师需要从更高的视角出发,寻找知识内容的“生长线”,依据知识发展的脉络合理地规划单元知识点,再按照合乎逻辑的顺序将单元知识点安排在具体的课时。

在《圆锥曲线的方程》一章中,可以认为知识结构是以数形结合思想为暗线,以三种圆锥曲线的标准方程和简单几何性质为明线发生发展的。在这之中,椭圆的学习最为基础和重要,无论是探究其标准方程的过程方法,还是研究其简单几何性质的思路,都需要学生感悟数形结合、类比和化归的思想方法,用坐标法研究几何问题。而在双曲线的学习中教师只需要引导学生类比椭圆中的思维活动;最后将抛物线的标准方程与简单几何性质作为一个小单元,学生自主类比椭圆和双曲线进行学习。

这样进行单元教学,才能体现知识间的关联性,突出单元的整体性,学生在类比学习的过程中提高了迁移学习的能力,凸显了学生的主体性,帮助学生对新知识同化和对旧知识改造,建立了新旧知识间的联系,促进良好认知结构的发展。

4.3.3 开展特色实践主题活动,激发学生有意义学习心向

学习者需要具备有意义学习的心向是奥苏贝尔在提出有意义学习理论时认为学习者需要具备的内部条件之一,是指学习者积极主动地建立新知识与已有的适当观念间的联系的倾向性^[53]。这种心向来自学生对待学习任务的态度、所追求的目标、爱好和兴趣,有了这样的学习心向,学习才有可能是有意义的。数学学习不仅仅要掌握基本的数学知识,还应将其应用于实际生活和生产实践。据此,教师应该积极开展教学活动,激发学生有意义学习的心向,如:由生活经验引入课堂,由旧知识提出新问题,构建知识地图等。

圆锥曲线在生活中有着广泛的应用,教师可以从生活实际出发,引导学生寻找圆锥曲线的应用,使学生通过亲身经历与实践产生有意义心向。在教学过程中多联系已经学习过的内容,如在学习双曲线和抛物线时引导学生类比椭圆,学生在这样的教学活动中充分发挥自身的主观能动性,积极地在新知识与已有的适当观念间建立联系,培养他们主动获取知识的能力,激发学生主动学习的兴趣,促进有意义学习的发生。

第5章 研究总结与展望

5.1 研究总结

论文对促进有意义学习的高中数学单元教学设计——以《圆锥曲线的方程》为例进行研究,针对学生对圆锥曲线的学习现状、在以往教学中经历单元教学的感受以及教师对单元教学的了解程度和使用情况等问题,于笔者所在的实习学校——石河子市某高中进行了问卷调查。接着对《圆锥曲线的方程》一章进行了促进有意义学习的单元教学设计,并进行了如下思考:

(1)在《圆锥曲线的方程》一章使用单元教学能够促进学生实现有意义学习。笔者从数学要素、课标要求、教材对比等多个方面进行分析,确定了单元教学内容、目标和方法等,对圆锥曲线内容进行单元教学设计。在设计时注重知识间的前后联系和逻辑关系,以便更好适应并发展学生的认知结构;以数形结合的思想方法为主线,使学生在掌握知识的同时学会解析几何的研究方法,做到举一反三,发展学生批判性、创造性的高阶思维能力。

(2)调查中的绝大多数教师都认可单元教学的方式,认为它对学生学习效果能够起到一定的优化作用,但部分教师对单元教学理论的了解还不够深入,这是影响其使用单元教学方法授课的原因之一;另外,单元教学对教师自身的业务能力和学生学习水平都有一定的要求,也在一定程度上制约着单元教学的使用频率。

(3)《圆锥曲线的方程》单元教学设计是在整体性思维下进行的,对课时顺序的安排以及知识间的衔接方式需要在充分分析学生认知结构、查阅和研讨大量相关资料后才能完成,否则就会让学生感到知识是割裂的,从而一头雾水,因此对教学内容的设计需要经历多次的研磨与修改。

5.2 不足与展望

5.2.1 不足

限于笔者自身的研究水平,加之笔者所读的是两年制的专业硕士,在研究时间上有限,因此对于促进有意义学习的高中数学单元教学研究理论知识掌握并不全面,分析时

会有一定的片面性；对解析几何的本质、圆锥曲线更深层次的内在联系等认识也不够深刻，因此教学设计可能存在一定的浅显性。其次，出于新冠疫情的影响，未能在更大范围内开展问卷调查，因此数据可能不具有普遍性。由于笔者只在石河子市某高中高三年开展为期半年的实习，因此单元教学设计也未能经过实践检验效果。

5.2.2 展望

近些年来，越来越多的专家学者和一线教师开始关注和研究单元教学，但笔者在调研相关文献的过程中发现在高中数学中对整个单元进行完整设计的研究还不多，我们应当在高中数学课本中积极开发单元教学案例，体现更为完整的单元教学设计思路，甚至可以与其他学段或学科对接，培养全面发展的更高层次的人才；另一方面，应积极加强有意义学习与单元教学理论的联系，使数学教学不止关注学习的结果，还关注培养学生学习过程中积极的情感倾向和反思意识，使学生在大胆猜想、动手实践的过程中提高获取知识的能力，进而能更好地适应社会、融入社会。

参考文献

- [1] 钟启泉.单元设计:撬动课堂转型的一个支点[J].教育发展研究,2015,35(24):1-5.
- [2] 戴风明.论“有意义的学习经历”教学观与数学有效教学[J].数学教育学报,2010,19(06):23-25.
- [3] 刘春艳.聚焦核心素养的单元教学设计——以高中“平面向量的运算”单元为例[J].数学通报,2020,59(07):49-53.
- [4] 孔凡哲,曾峥.数学学习心理学[M].北京:北京大学出版社,2012.
- [5] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版 2020年修订)[M].北京:人民教育出版社,2020.
- [6] 喻平.数学教学心理学[M].北京:北京师范大学出版社,2018.5.
- [7] 刘斌.从构建学生数学认知结构看高中数学教材的编写[J].课程·教材·教法,1998(5):26-29.
- [8] 姜合峰,刘珍,王川龙.有意义学习理论用于数学课堂导入的条件与策略[J].教学与管理,2018(21):96-98.
- [9] 曹才翰.数学意义学习初探[J].数学通报,1986(08):1-4.
- [10] 谢明初.数学机械学习与意义学习的再认识[J].数学教育学报,1999(03):18-20+23.
- [11] 吕世虎,吴振英,杨婷,王尚志.单元教学设计及其对促进数学教师专业发展的作用[J].数学教育学报,2016,25(05):16-21.
- [12] 章飞,顾继玲.单元教学的核心思想与基本路径[J].数学通报,2019,58(10):23-28.
- [13] 吕世虎,杨婷,吴振英.数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J].当代教育与文化,2016,8(04):41-46.
- [14] 任友群,朱广艳.有意义的学习源自问题解决——戴维·乔纳森教授访谈[J].中国电化教育,2009(01):6-10.
- [15] L·迪·芬克.创造有意义的学习经历——综合性大学课程设计原则[M].胡美馨,刘颖,译.杭州:浙江大学出版社,2006:5-8.
- [16] 宋善炎,丁向阳.“有意义学习”与“有意义的学习经历”[J].教育科学研究,2010(3):63-65,69.
- [17] 许康,王照亮,张克舫,马永.建构主义理论在 OBE 教育模式中的应用与研究[J].教育教学论坛,2021(39):104-107.
- [18] 李雅琛.布鲁纳《教育过程》在中国大陆的传播及影响问题研究[D].东北师范大学,2015.
- [19] 邵瑞珍,皮连生,吴庆麟.简评〔美〕奥苏伯尔《教育心理学》[J].心理科学通

- 讯,1982(04):58-60+49.
- [20]涂荣豹.数学解题的有意义学习[J].数学教育学报,2001(04):15-20.
- [21]钱珮玲.如何认识数学教学的本质[J].数学通报,2003(10):29-33.
- [22]张晓斌.创设问题情境唤起学生的创新思维[J].数学通报,2003(02):7-10.
- [23]余文森.论有效教学的三大理论基础[J].课程·教材·教法,2012,32(02):15-22.
- [24]赵卓,汤婷婷.思维导图在高中生物教学中的应用[J].教学与管理(理论版),2016(10):92-94.
- [25]朱京曦.智能时代教学互动的内涵回归[J].中国远程教育,2021(03):45-52.
- [26]李良方,董吉贺.欧洲新教育运动的教育智慧[J].铜仁学院学报,2015,17(02):170-175.
- [27]梁启超.梁著作文入门[M].北京:中国工人出版社,2007.
- [28]马田.新文化运动时期外国现代教育思想的传入及其影响[D].中南大学,2011.
- [29]王海青.论整体主义教学[J].全球教育展望,2019,48(04):34-44.
- [30]覃可霖.单元教学漫谈[J].广西师院学报,1995(01):81-85.
- [31]马兰.整体化有序设计单元教学探讨[J].课程·教材·教法,2012,32(02):23-31.
- [32]钟启泉.学会“单元设计”[N].中国教育报,2015-06-12(009).
- [33]章建跃.整体性、系统思维与核心素养[J].中小学数学(高中版),2016(10):66.
- [34]李大永.基于数学思想方法的理解,整体设计解析几何的教学[J].数学通报,2016,55(11):13-18.
- [35]崔允漷.学科核心素养呼唤大单元教学设计[J].上海教育科研,2019(4):1
- [36]喻平.数学单元结构教学的四种模式[J].数学通报,2020,59(05):1-8+15.
- [37]何小亚,张敏,李湖南,罗静,张艳虹.数学单元教学设计标准与案例[J].数学通报,2021,60(05):46-48+53.
- [38]李铁安,宋乃庆.高中解析几何教学策略——数学史的视角[J].数学教育学报,2007(02):90-94.
- [39]王芳,汪晓勤.HPM 视角下椭圆概念教学的意义[J].中学数学月刊,2012(4):57-60.
- [40]徐章韬.教育数学一线串:圆的基础性[J].数学通报,2019,58(07):19-22+30.
- [41]李振雷.椭圆定义教学实践与思考[J].数学通报,2011,50(10):62-64.
- [42]罗德建,伍春兰.核心素养视域下的“椭圆及其标准方程”的教学改进[J].数学通报,2019,58(05):40-44.
- [43]朱胜强.抛物线定义的教学[J].数学通报,2017,56(05):27-29.
- [44]曾荣.单元教学的整体设计与课时实施——以“圆锥曲线”单元教学为例[J].数学通报,2021,60(03):33-36.
- [45]杨勇.章节起始课教学应关注的几个维度——以“圆锥曲线”起始课为例[J].数学通报,2021,60(01):52-56.
- [46]陆琳琰.抛物线的发生教学研究[D].华东师范大学,2013.

- [47]王海青.问题驱动理论下“圆锥曲线与方程”教学重构[D].广州大学,2019.
- [48]冉丽冰.发展和完善高中生数学认知结构的整体教学策略研究[D].陕西师范大学,2017.
- [49]胡腊梅.深度学习视域下单元教学的研究与实践[D].江西师范大学,2021.
- [50]鞠文轩.基于 ADDIE 模型的数学单元教学设计的实践与思考[D].江西师范大学,2020.
- [51]章建跃.第三章 圆锥曲线的方程教材介绍与教学建议[J].中学数学教学参考,2021(01):8-16.
- [52]张华.课程与教学论[M].上海:上海教育出版社,2000,11:127-131.
- [53]黄梅.奥苏贝尔的有意义接受学习理论在中学数学教学中的应用研究[D].云南师范大学,2006.

附录

附录 A: 高中学生关于《圆锥曲线的方程》单元学习现状调查

亲爱的同学,你好!本调查旨在了解你对“圆锥曲线”的认识和学习的感受,调查结果仅供个人研究所用,不涉及对学校、教师、学生的评价,请如实作答。本问卷不署名,谢谢你的真诚合作,祝你学习更上一层楼!

1.你觉得圆锥曲线教学内容在高中数学课程中重要吗?

- A.非常重要 B.有点重要 C.不是很重要 D.一点也不重要

2.你对圆锥曲线的内容感兴趣吗?

- A.兴趣很大 B.有点兴趣 C.不太有兴趣 D.不感兴趣

3.你觉得学习圆锥曲线内容对发展你的数学思维有帮助吗?

- A.很有帮助 B.有点帮助 C.不太有帮助 D.没有帮助

4.你觉得圆锥曲线学起来难易程度如何?(选 A 答第 5 题;选 B 答第 6 题)

- A.难 B.易

5.学习圆锥曲线时你的主要困难有哪些?(可多选)

- A.概念难以理解 B.基本性质容易混淆 C.方法难,想不到
D.与其他知识联系多 E.运算复杂

6.学习圆锥曲线时为何觉得容易?(可多选)

- A.方法较为单一,变化少 B.算理清楚,只要运算总能算出结果 C.掌握了
基础知识,就很简单 D.能够利用数形结合等思想构造关系式 E.愿意学数学,
有兴趣

7.你能理解并记忆各种圆锥曲线的第一定义吗?

- A.完全可以 B.基本可以 C.有些可以 D.不可以

8.你能理解并记忆各种圆锥曲线的统一定义吗?

- A.完全可以 B.基本可以 C.有些可以 D.不可以

9.你能够说出各圆锥曲线性质间的联系和区别吗?

- A.完全可以 B.基本可以 C.有些可以 D.不可以

10.学习圆锥曲线的统一定义更能帮助你理解圆锥曲线的本质属性吗?

- A.帮助很大 B.有些帮助 C.帮助不大 D.没有帮助

11.你觉得采用单元教学设计来开展教学能帮助你更系统、全面地掌握圆锥曲线这一部分的知识吗?

A.帮助很大

B.有些帮助

C.帮助不大

D.没有帮助

附录 B：高中数学教师单元教学设计现状调查

尊敬的老师，您好！为了解当下数学教师进行单元教学设计的实际情况，我们选取您作为调查对象。本问卷不署名，仅供个人研究所用不涉及对学校、教师的评价，请您根据实际情况如实填写。感谢您的支持与合作！

1. 您是否了解单元教学？（ ）

- A. 比较了解 B. 一般 C. 较少 D. 不了解

2. 您在日常工作中有采用单元教学设计吗？（ ）

- A. 基本都会 B. 经常会 C. 偶尔会 D. 基本不会

3. 您认为在高中义务教育阶段开展数学单元教学有必要吗？（ ）

- A. 非常必要 B. 有一定必要 C. 没有太大必要 D. 没有必要

4. 您在进行单元设计时，对单元教学设计的方法了解的清楚吗？（ ）

- A. 非常清楚 B. 比较清楚 C. 一般 D. 不清楚

5. 您认为单元教学设计对您的业务能力提高有帮助吗？（ ）

- A. 非常有 B. 有一些 C. 不太有 D. 没有

6. 您在选定单元内容时，经常查阅辅助资料吗？（ ）

- A. 经常 B. 有需要时 C. 偶尔 D. 不查阅

7. 您在采用单元教学后，是否会进行教学效果评价分析？（ ）

- A. 经常会 B. 有时会 C. 偶尔会 D. 不会

8. 您会在圆锥曲线备课时考虑学生已有的解析几何知识基础和理解力吗？

- A. 精心考虑 B. 有所考虑 C. 不怎么考虑 D. 不考虑

9. 您认为在《圆锥曲线的方程》一章实施单元教学对学生建立平面解析几何的整体认知结构是否有帮助？（ ）

- A. 很有帮助 B. 有一定帮助 C. 一般 D. 没有帮助

致谢

忙碌而又精彩的研究生学习生活即将进入尾声，在这段学习时光里，我收获了很多，也成长了很多。

首先，我要特别感谢我的导师——谢红梅老师。刚入学时的我对学习生活有一些迷茫，谢老师为我们推荐优质书籍和刊物，为论文的撰写打下了坚实的基础。在论文选题、开题、撰写过程中，老师认真负责、科学严谨的科研精神深深鼓舞和感动着我，在论文的修改过程中，给予我许多宝贵的指导意见。在这个过程中，我收获了很多，成长了很多。

另外，我要感谢研究生期间所有课程的任课老师、教学实践期间帮助我的老师以及同学们。老师们认真负责，研究生课程丰富多彩，我学到许多有用的知识，也增强了合作意识。实习学校的杨磊老师在教学工作和班主任工作上都给予我许多指导，协助我完成本次的问卷调查。同时也要感谢实习班级的同学们对我实习以及教育教学研究工作的支持。

最后，我要感谢我的家人、朋友和同学们，在我迷茫疲惫的时候，是你们给了我关怀和帮助，使我战胜困难。

石河子大学硕士研究生学位论文

导师评阅表

研究生姓名	王奕今	学制	全日制两年
专业	学科教学（数学）	研究方向	学科教学（数学）
学术评语: 单元教学对增强学生主体性, 培养学生核心素养, 提高学生能力等方面有着重要作用, 能够帮助学生达成有意义的学习。论文通过探索有意义学习理论与单元教学之间的联系, 以石河子市某中学的学生和老师为研究对象, 以 2019 人教 A 版普通高中数学教科书选择性必修一第三章《圆锥曲线的方程》为例, 尝试结合有意义学习理论和单元教学的特征, 设计出能够促进有意义学习的圆锥曲线单元教学方案。选题具有实际应用意义, 提出了促进有意义学习的高中数学单元教学设计的相关策略, 为教师更好地利用单元教学发展学生良好认知结构, 深层次地发展学生数学高阶思维能力, 实现学生有意义学习提供了参考。 该论文研究问题明确, 内容丰富, 研究设计合理, 数据准确, 结论较为可信, 提出的教学策略较为可行。论文整体写作态度认真、逻辑主线清晰、行为表述规范, 研究成果具有一定的理论和现实意义。总体来看, 该生已掌握学科教学（数学）领域的基本理论和分析方法, 论文达到专业学位硕士论文水平要求。 指导教师签字:  2022 年 5 月 25 日			