# 浅谈圆锥曲线中相交弦定理问题

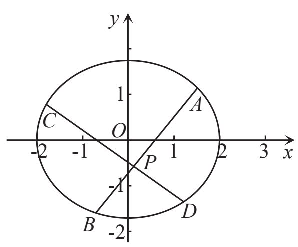
■高　建

**摘　要**：椭圆是圆锥曲线重要的组成部分，在新高考评价体系中，明确提出“一核”“四层”“四翼”的概念，其中“四层”为考查内容，即“核心价值、学科素养、关键能力、必备知识”，而关键能力的培养，更应该拓展知识的外延性，从类比中发现问题。在初中我们已经认真学习过圆的相交弦定理，而椭圆又是最接近圆的曲线，所以我们很容易联想到椭圆是否有这个性质，找到定理存在的条件，当我们找到椭圆相交弦定理存在的时候，我们又可以试着找到其他圆锥曲线是否存在相交弦定理。

**关键词**：椭圆；圆；相交弦定理；仿射变换

在初中的时候，我们已经学习了相交弦定理，即经过圆内一点引两条弦，各弦被这点所分成线段的积相等。我们利用相似很容易证明出结论，既然椭圆是最接近圆的圆锥曲线，那么它是否具有相交弦定理类似的性质呢？下面我们用三种方法证明椭圆的相交弦定理。

已知椭圆$E$内两条弦$AB$、$CD$相交于点$P$，是否存在类似的圆的相交弦定理呢？即$|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$，如果成立又有满足什么样的条件？




**方法一**：直接利用解析几何的方法，设$P$点坐标$(x_0,y_0)$，$AB$的方程为$y-y_0=k_1(x-x_0)$，$CD$的方程为$y-y_0=k_2(x-x_0)$，椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线$AB$与椭圆方程联立我们得到$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2k(y_0-kx_0)x+a^2(y_0-kx_0)^2-a^2b^2=0$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$|PA|=\sqrt{1+1+k_1^{\,2}}\left|x_1-x_0\right|$，$|PB|=\sqrt{1+k_1^{\,2}}\left|x_2-x_0\right|$，所以$|PA|\cdot|PB|=(1+k_1^2)\left|x_1-x_0\right|\left|x_2-x_0\right|$，又因为$x_1+x_2=-\frac{2a^2k(y_0-kx_0)}{b^2+a^2k^2}$，$x_1\cdot x_2=-\frac{a^2(y_0-kx_0)^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}$，代入我们得到$|PA|\cdot|PB|=\frac{\left(1+k_1^{\,2}\right)\left|a^2y_0^{\,2}+b^2x_0^{\,2}-a^2b^2\right|}{b^2+a^2k_1^{\,2}}$，同理可得$|PC|\cdot|PD|=\frac{\left(1+k_2^{\,2}\right)\left|a^2y_0^{\,2}+b^2x_0^{\,2}-a^2b^2\right|}{b^2+a^2k_2^{\,2}}$，若$|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$，即$\frac{\left(1+k_1^{\,2}\right)\left|a^2y_0^{\,2}+b^2x_0^{\,2}-a^2b^2\right|}{b^2+a^2k_1^{\,2}}=\frac{\left(1+k_2^{\,2}\right)\left|a^2y_0^{\,2}+b^2x_0^{\,2}-a^2b^2\right|}{b^2+a^2k_2^{\,2}}$，我们得到$k_1^{\,2}=k_2^{\,2}$，很明显我们得到只有当斜率互为相反数的时候，在椭圆内相交弦定理也对。

**方法二**：我们利用参数方程来解决这个问题，设椭圆的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，设$P$点坐标$(x_0,y_0)$，$AB$的参数方程为$\begin{cases}x=x_0+\cos\theta_1 t\\ y=y_0+\sin\theta_1 t\end{cases}$，直线与椭圆联立得到$\left(b^2\cos^2\theta_1+a^2\sin^2\theta_1\right)t^2+(2b^2x_0\cos\theta_1+2a^2y_0\sin\theta_1)t+(b^2x_0^{\,2}+a^2y_0^{\,2}-a^2b^2)=0$，按照参数方程的几何意义$|PA|\cdot|PB|=\left|t_1\cdot t_2\right|=\frac{\left|b^2x_0^{\,2}+a^2y_0^{\,2}-a^2b^2\right|}{b^2\cos\theta_1^{\,2}+a^2\sin\theta_1^{\,2}}$，同理$|PC|\cdot|PD|=\left|t_3\cdot t_4\right|=\frac{\left|b^2x_0^{\,2}+a^2y_0^{\,2}-a^2b^2\right|}{b^2\cos\theta_2^{\,2}+a^2\sin\theta_2^{\,2}}$，如果满足$|PA|\cdot|PB|=|PC|\cdot|PD|$我们易得到$\sin^2\theta_1=\sin^2\theta_2$，很容易得出$\theta_1+\theta_2=\pi$，跟方法一得到的结论是一致的。

**方法三**：我们利用仿射变换的方法证明，我们首先利用仿射变换解决这个问题，先建立仿射变换$\varphi:\begin{cases}x'=\frac{x}{a}\\ y'=\frac{y}{b}\end{cases}$，把椭圆方程变成单位圆$x'^2+y'^2=1$，我们依次把椭圆中的点变为$A'$，$B'$，$C'$，$D'$，$P'$，我们显然可由圆相交弦性质得出$|P'A'|\cdot|P'B'|=|P'C'|\cdot|P'D'|$，由仿射变换的性质我们得到$\frac{l'}{l}=\frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{k_1^{\,2}}{b^2}}}{\sqrt{1+k_1^{\,2}}}$，代入圆的相交弦定理我们得到$\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{k_1^{\,2}}{b^2}}{1+k_1^{\,2}}|PA|\cdot|PB|=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{k_2^{\,2}}{b^2}}{1+k_2^{\,2}}|PC|\cdot|PD|$，若椭圆的相交弦定理成立，则我们得到

# 知识可视化视角下信息技术的实践研究

■蒋志成

**摘　要：**随着新课改的深入推进，信息技术教学也在不断进行着革新。在此背景下，如何做好教学模式的优化工作，为学生信息素养以及综合素质的发展提供助力，已经成为每一位信息技术教师都亟待思考的问题。而知识可视化作为一种创新性的教育理念，在提高信息技术教学有效性，推进核心素养教育落实方面展现出了巨大活力，将其渗透到信息技术课堂也是教育现代化的必然举措。基于此，本文以初中信息技术教学为论点，就知识可视化视角下信息技术教学实践进行了详细探讨，以期能够给广大教师同仁提供一些借鉴参考。

**关键词：**初中信息技术；知识可视化；教学实践

众所周知，信息技术作为初中教育的一门重要基础课程，在培养学生信息素养方面有着巨大的作用。在新时期，面对信息化的时代发展形势，信息技术教学的改革事宜备受各界关注。众所周知，初中信息技术有着知识点多、内容关联性强等特点，对教学模式有着极高要求。在以往的教学中，初中信息技术教学大多是以灌输式方式展开，这显然是不利于学生信息素养培养的。而知识可视化作为一种以视觉表征手段来推进知识教育的新型教学理念，能够让学生更加便捷和深刻地把握相关知识点的内涵精髓，从而实现其信息素养的有序化发展。所以，积极探讨知识可视化视角下信息技术教学的实践与改革是很有必要的。

## 一、知识可视化的内涵阐释

知识可视化作为一种以数据以及信息可视化理念为支撑的新型教育理念，指的是以图像或者图形等方式来表达抽象性

---

$$\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{k_1{}^2}{b^2}}{1+k_1{}^2}=\frac{\frac{1}{a^2}+\frac{k_2{}^2}{b^2}}{1+k_2{}^2}$$，进而得出 $k_1{}^2=k_2{}^2$，也就是两条直线斜率互为相反数。

那么如果相交弦放在双曲线中，这个定理成立的条件又是什么呢？下面我们简单证明一下。

已知双曲线 $E$ 内两条弦 $AB$、$CD$ 相交于点 $P$，

设 $P$ 点坐标 $(x_0, y_0)$，$AB$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + \cos\theta_1 t \\ y = y_0 + \sin\theta_1 t \end{cases}$，直线与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 联立得到 $\left(b^2\cos^2\theta_1 - a^2\sin^2\theta_1\right)t^2 + (2b^2x_0\cos\theta_1 - 2a^2y_0\sin\theta_1)t + (b^2x_0{}^2 - a^2y_0{}^2 - a^2b^2) = 0$。

按照参数方程的几何意义 $|PA|\cdot|PB| = \left|t_1\cdot t_2\right| = \left|\frac{b^2x_0{}^2 - a^2y_0{}^2 - a^2b^2}{b^2\cos\theta_1{}^2 - a^2\sin\theta_1{}^2}\right|$，同理 $|PC|\cdot|PD| = \left|t_3\cdot t_4\right| = \left|\frac{b^2x_0{}^2 - a^2y_0{}^2 - a^2b^2}{b^2\cos\theta_2{}^2 - a^2\sin\theta_2{}^2}\right|$，如果满足 $|PA|\cdot|PB| = |PC|\cdot|PD|$，我们很容易得到跟椭圆相同的结论。

那么如果相交弦放在抛物线里，这个定理成立的条件又是什么呢？我们进一步证明：

设 $P$ 点坐标 $(x_0, y_0)$，$AB$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + \cos\theta_1 t \\ y = y_0 + \sin\theta_1 t \end{cases}$，直线与抛物线 $y^2 = 2px$ 联立得到 $\sin^2\theta_1 t^2 + (2\sin\theta_1 y_0 - 2p\cos\theta_1)t + (y_0{}^2 - 4x_0) = 0$，$|PA|\cdot|PB| = \left|t_1\cdot t_2\right| = \left|\frac{y_0{}^2 - 4x_0}{\sin\theta_1{}^2}\right|$，

同理我们得到 $|PC|\cdot|PD| = \left|t_3\cdot t_4\right| = \left|\frac{y_0{}^2 - 4x_0}{\sin\theta_2{}^2}\right|$。

如果我们满足 $|PA|\cdot|PB| = |PC|\cdot|PD|$，依然可以得到相同的结论。

以上证明方法，分别采用了不同的手段证明了椭圆、双曲线、抛物线相交弦定理的成立条件，这也是证明圆锥曲线上四点共圆的方法，我们还可以进一步引导学生思考点 $P$ 的位置，曲线内曲线外是否成立，进一步培养学生的逻辑推理、自主探究的数学能力，形成解决问题的关键能力，这都是对学生大有裨益的。

**参考文献**

[1]贾慧美.基于仿射变换下对椭圆的探讨[J].数学教学通讯，2012(12).

[2]谢玉兰.圆幂定理在椭圆上的推广及其若干推论[J].中学数学研究，2016(03).

（作者单位：广东省中山市第一中学）