



高中数学圆锥曲线解答题的突破探究

董梦茹

(山东省邹平市第一中学)

圆锥曲线是高中的难点知识,相关问题在高考中以压轴题的形式出现,是拉分的重要题型.本文将圆锥曲线问题分成定点问题、定值问题、最值问题、范围问题这四大类型,讲解各种类型问题的解题思路并展示相关习题的解答过程,供读者参考.

1 定点问题

突破圆锥曲线定点问题应做好以下工作.其一,明确圆锥曲线方程.对于未给出明确方程的题目,应运用已知条件进行求解;其二,结合题意巧妙地设直线方程,并与圆锥曲线方程联立;其三,借助根与系数的关系找到点的坐标之间的关系,尤其注重运用已知条件,求出所设的参数,判断直线是否过定点.

 **例 1** 已知抛物线方程为 $y^2 = 4x$, 直线 l 和抛物线交于不同的 A, B 两点, 其中 O 为坐标原点.

(1) 若直线 l 过焦点, 求 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ 的值;

(2) 若 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$, 直线 l 是否过定点, 若过定点, 求出该定点, 若不过, 请说明理由.

 **解析** (1) 设直线 l 的方程为 $my = x - 1$, 交点坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. 联立

$$\begin{cases} my = x - 1, \\ y^2 = 4x, \end{cases} \text{ 得 } y^2 - 4my - 4 = 0, \text{ 所以 } \Delta =$$

$16m^2 + 16 > 0$, 由根与系数的关系得 $y_1 + y_2 = 4m$, $y_1 y_2 = -4$. 因为 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = (1 + m^2) \cdot y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1 = -3$.

(2) 设直线 l 的方程为 $ty = x + n$, 联立 $\begin{cases} ty = x + n, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 得 $y^2 - 4ty + 4n = 0$, 由根与系数得关系得 $y_1 + y_2 = 4t, y_1 y_2 = 4n, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = (1 + t^2) y_1 y_2 - tn(y_1 + y_2) + n^2 = n^2 + 4n = -4$, 则 $n = -2$, 则直线 l 的方程为 $ty = x - 2$, 易知其过定点 $(2, 0)$.

2 定值问题

突破该类问题的思路如下.其一,在明确圆锥曲

线方程的基础上,将其和直线方程联立,构建交点和方程系数之间的等式方程;其二,采用坐标表示出要求解定值问题的表达式;其三,对表达式进行整理,求得无关参数的值.

 **例 2** 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 和直线 $x - \sqrt{2}y + 4 = 0$ 相切.

(1) 求该抛物线的方程;

(2) 在 x 轴正半轴上是否存在一点 M , 过 M 的直线 l 和 C 交于 A, B 两点, 使得 $\frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|BM|^2}$ 为定值, 若存在, 求出点 M 的坐标和定值; 若不存在, 说明理由.

 **解析** (1) 联立 $\begin{cases} y^2 = 2px, \\ x - \sqrt{2}y + 4 = 0, \end{cases}$ 得 $y^2 - 2\sqrt{2}py + 8p = 0$, 因为直线和 C 相切, 故 $\Delta = 8p^2 - 32p = 0$, 解得 $p = 0$ (舍) 或 4 , 则抛物线 C 的方程为 $y^2 = 8x$.

(2) 设存在点 M , 将坐标设为 $(m, 0) (m > 0)$, 直线 l 的方程为 $x = ty + m$, 联立 $\begin{cases} x = ty + m, \\ y^2 = 8x, \end{cases}$ 可得 $y^2 -$

$8ty - 8m = 0$. 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$y_1 + y_2 = 8t, y_1 y_2 = -8m,$$

$$|AM|^2 = (x_1 - m)^2 + y_1^2 = (t^2 + 1)y_1^2,$$

$$|BM|^2 = (x_2 - m)^2 + y_2^2 = (t^2 + 1)y_2^2,$$

$$\text{则 } \frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|BM|^2} = \frac{1}{(t^2 + 1)y_1^2} + \frac{1}{(t^2 + 1)y_2^2} =$$

$$\frac{1}{t^2 + 1} \cdot \frac{y_1^2 + y_2^2}{y_1^2 y_2^2} = \frac{1}{t^2 + 1} \cdot \frac{4t^2 + m}{4m^2} =$$

$$\frac{1}{t^2 + 1} \cdot \frac{t^2 + \frac{m}{4}}{m^2},$$

若其为定值则应满足 $\frac{m}{4} = 1$, 即 $m = 4$, 且满足 $\Delta > 0$,

因此, 存在 $M(4, 0)$, 使得 $\frac{1}{|AM|^2} + \frac{1}{|BM|^2}$ 为定值 $\frac{1}{16}$.

3 最值问题

突破圆锥曲线最值问题可考虑采用如下思路.其



一,认真审题,即要注重已知条件的应用,然后借助几何关系挖掘隐含条件,构建相关的等式方程;其二,通过联立直线与圆锥曲线方程,表示出要求解最值的表达式,运用构建的等式方程进行参数的代换,而后运用函数或不等式知识求解出最值.

例 3 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线交椭圆 C 于 M, N 两点, 且 $\triangle F_2MN$ 的周长为 8.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 过点 $P(m, 0)$ 作圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的切线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点, 求弦长 $|AB|$ 的最大值.



解析 (1) 椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ (求解过程略).

(2) 根据题意可知 $|m| \geq 1$.

当 $m = \pm 1$ 时, 直线 l 和 x 轴垂直, 将 $P(m, 0)$ 代入方程 C , 可求得 A, B 两点的坐标, 此时 $|AB| = \sqrt{3}$.

当 $|m| > 1$ 时, 设切线 l 的方程为 $y = k(x - m)$ ($k \neq 0$), 因为其和圆 $x^2 + y^2 = 1$ 相切, 所以 $\frac{|km|}{\sqrt{1+k^2}} = 1$, 整理得 $m^2 k^2 = k^2 + 1$, 即 $k^2 = \frac{1}{m^2 - 1}$, 联立

$$\begin{cases} y = k(x - m), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{得}$$

$$(1 + 4k^2)x^2 - 8k^2mx + 4m^2k^2 - 4 = 0,$$

$$\Delta = 64k^4m^2 - 4(1 + 4k^2)(4k^2m^2 - 4) = 48k^2 > 0.$$

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$x_1 + x_2 = \frac{8k^2m}{1 + 4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4k^2m^2 - 4}{1 + 4k^2},$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 + k^2)^2 \left[\frac{64k^4m^2}{(1 + 4k^2)^2} - \frac{4(4k^2m^2 - 4)}{1 + 4k^2} \right]} =$$

$$\frac{4\sqrt{3}|m|}{m^2 + 3} = \frac{4\sqrt{3}}{|m| + \frac{3}{|m|}} \leq 2.$$

综上, 当 $m = \pm 1$ 时, $|AB| = \sqrt{3}$; 当 $|m| > 1$ 时, $|AB|$ 的最大值为 2, 因此, $|AB|$ 的最大值为 2.

4 范围问题

求解圆锥曲线范围问题时可采用以下思路. 其

一,遇到直线与圆锥曲线问题,首先应将两个方程联立,找到交点与方程系数之间的等式关系;其二,对给出的条件进行巧妙转化,在这里应注重运用平面几何中的相关定理,构建另一等式方程.通过参数之间的相互代换,找到要求解参数的取值范围,为保证结果的正确性,解题的过程中尤其注重隐含条件的应用.



例 4 已知椭圆的一个顶点 $A(0, -1)$, 焦点在 x 轴上, 若右焦点到直线 $x - y + 2\sqrt{2} = 0$ 的距离为 3.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设椭圆和直线 $y = kx + m$ ($k \neq 0$) 相交于不同的两点 M, N , 当 $|AM| = |AN|$ 时, 求 m 的取值范围.



解析 (1) 根据题意设椭圆的方程为 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1$, 则其右焦点为 $F(\sqrt{a^2 - 1}, 0)$, 由点到直线的距离, 容易求得 $a^2 = 3$, 则椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$.

(2) 设弦 MN 的中点为 $P(x_P, y_P)$. 联立

$$\begin{cases} y = kx + m, \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{得 } (3k^2 + 1)x^2 + 6mkx + 3(m^2 - 1) = 0.$$

由 $\Delta > 0$, 得

$$m^2 < 3k^2 + 1. \quad \text{①}$$

设 M, N 的横坐标分别为 x_1, x_2 , 则

$$x_1 + x_2 = -\frac{6mk}{1 + 3k^2}, \quad x_P = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3mk}{1 + 3k^2},$$

则

$$y_P = kx_P + m = \frac{m}{1 + 3k^2},$$

$$k_{AP} = \frac{y_P + 1}{x_P} = -\frac{m + 3k^2 + 1}{3mk}.$$

因为 $|AM| = |AN|$, 所以 $AP \perp MN$, 则

$$-\frac{m + 3k^2 + 1}{3mk} \times k = -1, \text{ 即}$$

$$2m = 3k^2 + 1. \quad \text{②}$$

联立①②得 $0 < m < 2$, 又 $2m = 3k^2 + 1 > 1$, 则 $m > \frac{1}{2}$.

综上, m 的取值范围为 $(\frac{1}{2}, 2)$.

圆锥曲线是高中数学的难点, 是高考的重头戏, 常出现在压轴题中. 因其计算量大、技巧性强, 让不少学生望而生畏. 教师教学中要结合具体例题为学生逐一讲解不同题型的解题思路, 鼓励学生多进行训练, 不断提升自身的运算能力, 并做好解题的总结与反思.

(完)