解题探索

一道教材习题引发的高三一轮复习“一题一课”

黄琳娜

(福建省诏安第一中学,福建漳州,363500)

摘　要: 本文是基于湘教版数学选择性必修一的 3.3 的一道习题引发的一堂高三数学一轮复习课的“一题一课”的课堂教学研讨,内容由抛物线有关张直角、直线与抛物线的定点延伸到圆锥曲线,体现同一类问题的“数学方法知识论”,旨在引导学生把握数学本质,体验数学活动,积累经验,从对高中圆锥曲线类型题的“望题生畏”到“有迹可循,有路可走”,以达到“由一题,会一类,通一片”的课堂复习教学效果.

关键词: 张直角; 定点; 结论; 动中有静转化与化归

《普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订)》中指出: 高中数学课程观为优化课程结构,突出主线,创设合适的教学情境,启发学生的思考,引导学生把握数学内容的本质.新高考背景下的高考数学,越来越重视对学生综合能力的考察.因此,新高考背景下的高三数学一轮复习,需要适应高考改革,在教学内容、要求和方法作出相应的调整.

高考中对圆锥曲线相关知识的考查中,定点问题是考查学生四基、综合数学能力和素养的一个重要途径.此类问题主要涉及到直线、圆与圆锥曲线等方面的知识,渗透了函数、化归、数形结合的思想,所以是高考的热点题型之一.基于上述理解,本文以湘教版普通高中教科书选择性必修第一册第 140 页的习题 3.3 第 7 题为基础,在抛物线中探究出有关抛物线对顶点张直角的弦的判定和性质涉及的定点问题的几个结论.以此就对习题进行探究,运用定理并进行拓展,通过拓展使学生获得圆锥曲线中更多的性质.在课堂复习教学中,既体现了回归教材,又将其开发成“一题一课”,使例题不断成长,引导学生进行思考,发动学生的“内驱力”,以达到“由一题,会一类,通一片”的课堂复习教学效果.

1　习题再现

原题: 如图 1,直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y^2=2x$ 相交于 A,B 两点,求证: $OA\perp OB$.

第(1)小题的问题本质就是抛物线的弦对顶点张角为直角的问题.通过对本题的解答与研究,可以得出有关抛物线对顶点张直角的弦的判定和性质的相关结论.如下所述:

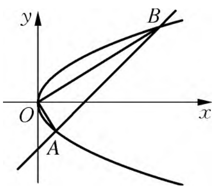

图 1

1.1　结论 1

设 $P(x_0,y_0)$ 是抛物线上一定点,A,B 是抛物线上两点,且满足 $PA\perp PB$,对抛物线 $y^2=2px$ $(p>0)$,直线 AB 恒过定点 $(2p+x_0,-y_0)$;对抛物线 $x^2=2py(p>0)$,直线 AB 恒过定点 $(-x_0,2p+y_0)$.

证明: 下面只对 $y^2=2px(p>0)$ 的情形加以证明,而另外一种情形完全类似.设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$ 是抛物线上两点,因为 $PA\perp PB$,所以有 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,即

$(x_0-x_1)(x_0-x_2)+(y_0-y_1)(y_0-y_2)=0$ 即 $(y_0^2-y_1^2)(y_0^2-y_2^2)+4p^2(y_0-y_1)(y_0-y_2)=0$ 因为 y_0,y_1,y_2 互不相等,所以有 $(y_0+y_1)(y_0+y_2)=-4p^2$,展开得 $y_1y_2=-4p^2-(y_1+y_2)y_0-2px_0\cdots①$,

另一方面,当 $x_1\neq x_2$ 时,$k_{AB}=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$,则直线 AB 的方程为 $y-y_1=\dfrac{2p}{y_1+y_2}(x-x_1)$,即 $y=\dfrac{2px}{y_1+y_2}+\dfrac{y_1y_2}{y_1+y_2}.\cdots②$,将①代入②式得 $y=\dfrac{1}{y_1+y_2}(2px-4p^2-2px_0)-y_0$.此直线 AB 恒过定点 $(2p+x_0,-y_0)$.经检验,当 $x_1=x_2$ 时,也满足.因此直线 AB 恒过定点 $(2p+x_0,-y_0)$.

特别的,当抛物线上的点 $P(x_0,y_0)$ 在顶点 $O(0,$

基金项目: 福建省诏安第一中学 2021 年度基础教育课程教学研究课题《新高考下高三数学一轮复习课堂教学的研究》(项目编号: zayzkt2021019).

0) 时，AB 恒过定点 $(2p,0)$，显然习题完全符合.

这是一个有意义但又不复杂的题目，笔者在复习课数学中帮助学生去挖掘问题的内在本质，“借题发挥”，将学生引入一个较为完整的理论领域.

1.2 结论应用

数学离不开解题，解题是学生参与到数学思维进行思考的一种数学活动，通过数学活动经验的积累，在做与思考的过程中经历数学发展的过程，逐渐累积知识的经验以提升学生的数学素养.故笔者在原题的基础上选择一道综合性较强的高考模拟题，引导学生运用相应的知识进行初步尝试.

例 1 （湖北省十一校 2021 届高三第一次联考第 21 题）已知直线 $y=x-2$ 与抛物线 $y^2=2px$ 相交于 A,B 两点，满足 $OA\perp OB$，定点 $C(4,2)$，$D(-4,0)$，M 是抛物线上一动点，设直线 CM,DM 与抛物线的另一个交点分别是 E,F.（1）求抛物线的方程；（2）求证：当 M 点在抛物线上变动时（只要点 E,F 存在且不重合）直线 EF 恒过一个定点；并求出这个定点的坐标.

分析：第（1）问联立方程组后消去变量 x，通过 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ 的坐标公式，可求出抛物线方程为 $y^2=2x$.此题若应用结论 1，可由直线 AB 过定点 $(2,0)$ 逆向求得 $p=1$ 进而得出抛物线方程为 $y^2=2x$.第（2）问仿照上题的证明过程，采用三点共线进行坐标运算，对点坐标“设而不求”，多变量归一，再利用动点的方程恒成立问题，求得定点坐标.

解析：（1）由 $\begin{cases}y=x-2\\y^2=2px\end{cases}$ 得 $y^2-2py-4p=0$，

$\therefore y_Ay_B=-4p$，$x_Ax_B=\dfrac{(y_Ay_B)^2}{4p^2}=4$，

$\therefore 4-4p=0$ 解得 $p=1$，

$\therefore$ 抛物线的方程为 $y^2=2x$.

（2）设 $M\left(\dfrac{y_0^2}{2},y_0\right)$，$E\left(\dfrac{y_1^2}{2},y_1\right)$，$F\left(\dfrac{y_2^2}{2},y_2\right)$，

由 C、M、E 三点共线，得：

$$\frac{y_0-y_1}{\frac{y_0^2}{2}-\frac{y_1^2}{2}}=\frac{y_0-2}{\frac{y_0^2}{2}-4}，即\frac{2}{y_0+y_1}=\frac{2(y_0-2)}{y_0^2-8}，$$

可解得 $y_1=\dfrac{2y_0-8}{y_0-2}$；①

同理，由 D、M、F 三点共线，得 $y_2=\dfrac{8}{y_0}$，②

直线 EF：$y-y_1=\dfrac{2}{y_1+y_2}\left(x-\dfrac{y_1^2}{2}\right)$，

$\therefore y_1y_2=(y_1+y_2)\cdot y-2x$，③

把①②两式代入③，整理得：

$\therefore (y-x)y_0^2+(2x-8)y_0+32-8y=0.$ *

y_0 为动点 M 的纵坐标，无论 y_0 取何值，* 式恒成立，所以

$$\begin{cases}y-x=0\\2x-8=0\\32-8y=0,\end{cases}\qquad \therefore x=y=4,$$

因此直线 EF 过定点 $(4,4)$.

评析：此题涉及到直线与抛物线的关系，逆用张直角的数量积关系，入口明确；再利用三点共线坐标问题引出“动中有定”，旨在考查学生的转化和化归能力、运算求解能力.

2 推而广之

圆锥曲线中的一些性质往往不仅仅是在抛物线中成立，现将上述抛物线改为椭圆，是否还有类似的性质呢？答案是肯定的.

2.1 结论 2

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右顶点分别为 A_1,A 上、下顶点分别为 B_1,B，直线 l 交椭圆于 C,D 两点.对右顶点 A，如果 $AC\perp AD$，那么直线 l 过定点 $M_1\left(\dfrac{ac^2}{a^2+b^2},0\right)$，反之，如果直线 l 过定点 $M_1\left(\dfrac{ac^2}{a^2+b^2},0\right)$，那么 $AC\perp AD$.

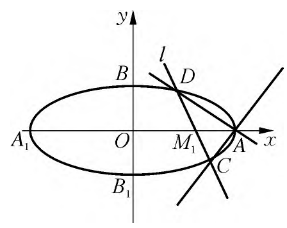

图 2

证明：如图 2，设过点 $M_1\left(\dfrac{ac^2}{a^2+b^2},0\right)$ 的直线 l 的方程为 $x=my+\dfrac{ac^2}{a^2+b^2}$，联立方程 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\x=my+\dfrac{ac^2}{a^2+b^2}\end{cases}$ 消去 x 得，$(m^2b^2+a^2)y^2+\dfrac{2mabc^2}{a^2+b^2}\cdot y-\dfrac{4a^4b^4}{(a^2+b^2)^2}=0$，

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，则有

$$y_1+y_2=-\frac{2mab^2c^2}{(m^2b^2+a^2)(a^2+b^2)},$$
$$y_1y_2=-\frac{4a^4b^4}{(m^2b^2+a^2)(a^2+b^2)^2}.$$

因为 $(x_1-a)(x_2-a)=\left(my_1+\frac{ac^2}{a^2+b^2}-a\right)\left(my_2+\frac{ac^2}{a^2+b^2}-a\right)=\left(my_1-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}\right)\left(my_2-\frac{2ab^2}{a^2+b^2}\right)=m^2y_1y_2-\frac{2mab^2}{a^2+b^2}(y_1+y_2)+\frac{4a^2b^4}{(a^2+b^2)^2}=-\frac{4a^4b^4m^2}{(m^2b^2+a^2)(a^2+b^2)^2}+\frac{2mab^2}{(a^2+b^2)^2}\cdot\frac{2mab^2c^2}{m^2b^2+a^2}+\frac{4a^2b^4}{(a^2+b^2)^2}=\frac{4a^4b^4}{(m^2b^2+a^2)(a^2+b^2)^2}$

所以，$k_{AC}\cdot k_{AD}=\frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_2}{x_2-a}=-1$，得到 $AC\perp BD$.

反之，显然直线 AC 的斜率存在且不等于 0，故设直线 AC 的方程为 $y=k(x-a)$，由 $\begin{cases}y=k(x-a)\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 得 $b^2x^2+a^2k^2(x-a)^2=a^2b^2$

展开整理得 $(x-a)\left[(b^2+a^2k^2)x-a^3k^2+ab^2\right]=0$，设 $C(x_c,y_c)$，得 $x_c=\frac{a^3k^2-ab^2}{b^2+a^2k^2}$，$y_c=\frac{-2ab^2k}{b^2+a^2k^2}$.

设 $D(x_D,y_D)$，因为 $AC\perp AD$，故以 $-\frac{1}{k}$ 代替 k，可以得 $x_D=\frac{a^3-ab^2k^2}{a^2+b^2k^2}$，$y_D=\frac{2ab^2k}{a^2+b^2k^2}$，

于是 $\overrightarrow{M_1C}=\left(\frac{2a^3b^2(k^2-1)}{(a^2+b^2)(b^2+a^2k^2)},\frac{2ab^2k}{b^2+a^2k^2}\right)$，

$\overrightarrow{M_1D}=\left(-\frac{2a^3b^2(k^2-1)}{(a^2+b^2)(a^2+b^2k^2)},-\frac{2ab^2k}{a^2+b^2k^2}\right)$，

所以 $\overrightarrow{M_1C}=-\frac{a^2+b^2k^2}{b^2+a^2k^2}\overrightarrow{M_1D}$，故 C，M_1D 三点共线，即直线 l 过定点 $M_1\left(\frac{ac^2}{a^2+b^2},0\right)$.

2.2 结论应用

例 2 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 的左右顶点为 A，B，点 D(不在 x 轴上)为直线 $x=6$ 上的一点，直线 AD 交曲线 C 于另一点 P.

(1) 证明: $PB\perp BD$; (2) 设直线 BD 交曲线 C 于另一点 Q，若圆 O 与直线 PQ 相切，求该圆半径的最大值.(此题留给学生课后思考并解答.)

分析: 第(1)问证明只需依题意设 $D(6,a)$，求出直线 AD: $x=\frac{8}{a}y-2$，与椭圆方程联立后消去 x 后求得点 P 的坐标，由 $k_{PB}\cdot k_{BD}=-1$ 可证明 $PB\perp BD$; 第(2)问先设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$，与椭圆方程联立后消去变量 y，通过 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=0$ 坐标运算，对点 P，Q 坐标“设而不求”，并将坐标转化为 m 和 k 的关系式，求得直线 PQ 过 x 轴上的一个定点 $M\left(\frac{ac^2}{a^2+b^2},0\right)$ 即 $\left(\frac{2}{3},0\right)$，再由原点 O 到直线 PQ 的距离求得半径的最大值.通过运算结果可知第(2)问符合椭圆中顶点张直角的直线过定点的结论 2.

附解析(2): 设直线 PQ 的方程为 $y=kx+m$，则

$$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1\end{cases},$$

整理得 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-4=0$，

$\Delta=(4km)^2-4(1+2k^2)(2m^2-4)>0$，

得 $4k^2+2>m^2$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

$\therefore x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{2m^2-4}{1+2k^2}$，①

$\because \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，$\therefore (x_1-2)(x_2-2)+y_1y_2=0$，②

把 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)$ 代入②整理得:

$(k^2+1)x_1x_2+(km-2)(x_1+x_2)+m^2+4=0$，

把①代入②化简得 $3k^2+8mk+4k^2=0$，

$\therefore m=-\frac{2}{3}k$ ($m=-2k$ 舍去)，

所以直线 PQ 定点 $\left(\frac{2}{3},0\right)$，故原点 O 到直线 PQ 的最大距离为 $d=\frac{2}{3}$，半径 $r_{\max}=\frac{2}{3}$.

3 教学思考

这是由一道抛物线的课后习题引发的一堂高三数学一轮复习课，重点探究张角垂直和直线与圆锥曲线的定点问题，其亮点在于通过回归教材，解析习题进行思考总结出相应的结论，并应用结论的扩张实现数学思维的提升，实现一类问题的解决，从而达到复习课课堂教学的有效性.

由于圆锥曲线考查的直观想象、数形结合、运算能力等综合性较强，学生常常是见题生畏，所以作为高三数学一轮复习课，教师的引导、启发就非常重要.本节由教材中的最基础的习题开始，师生共同探讨习题所蕴含的结论，教学生学会理解并欣赏数学，既解决了数学问题，同时也让学生通过这“一题一课”的课堂复习课感受到高考数学次压轴题是有迹可循、有路可走的.