听数学复习课　享“美食”大餐

——赏高三“直线与圆的综合运用”一轮复习课

214161　江苏省无锡市立人高中数学名师工作室　王华民　周星宇
214106　江苏省宜兴中学　张海强

一、困惑引入

师:请你谈谈在学习解析几何过程中最大的困惑是什么?

3—4个学生回答,主要困难有“方法的选择”、“运算繁琐”等.

师:我与大家有同感,解析几何的计算量很大,而且有时候算了半天还算不对.有没有办法把解析几何的运算简化呢?这节课,我们就这一话题作一些探究(出示课题).

二、新课探究

(以下每一道例题都是PPT投出)

例1　设直线l过点$(-2,0)$,且与圆$x^2+y^2=1$相切,则l的斜率是______.

(例1的上方红字显示:方法选择→你准会)

学生回答,教师作一些引导及相应操作:

方法一:设斜率为k,利用圆心到直线l的距离等于半径,得k.

六、教后反思

1. 教学目标定位要准确

概念教学一定要为学生提供丰富典型的具体例证,使学生经过自己的实践活动,从中归纳、概括出一类事物的共同本质特征,从而理解和掌握概念.

两个基本计数原理是一堂概念课,目的是帮助学生建立两个计数原理的概念.这堂课的教学过程大体可以分成三个阶段:抽象概括、内化理解、外化运用.一个概念的形成过程需要对一些材料进行观察、分析、比较、归纳、概括,因此,笔者首先给出两个贴近学生生活的简单例子,然后在教师引导下,让学生参与教学,举出了许多有利于归纳、抽象、概括出两个计数原理的其他例子,并让学生说出所举例子的共同点和不同点,加以比较,引导学生抓住本质,在这个基础上概括出两个计数原理.教学中,防止直接把概念“抛”给学生.

2. 学生主体地位要重视

课堂教学过程是在教学目标的指引下,由师生共同动态“生成”的.其中,学生的反馈是重要的,它决定了教学的进程.聆听学生是教师的必备技能,不要将学生作为“答案发生器”,不要沉浸在“我的学生都会做了”这种虚假的成功喜悦中,而应该让学生关注解决问题的过程、策略及思想方法,让他们充分地展示思想,完整地、数学地表达自己的想法,甚至于应该给予他们犯错的机会,也帮助他们提高分析错误、更正错误的能力.

本节课的两个计数原理不是教师直接给出的,而是在教师引导下,学生从典型丰富的具体例子出发,通过观察、比较、归纳等思维活动,逐步概括得到的.这一过程与前人形成这种计数方法所经历的过程有相似性.这样进行概念教学不仅能使学生深刻理解概念,而且也能更好地培养他们的思维能力.

3. 问题是数学教学的心脏

“问题是数学的心脏”,这是数学家哈尔莫斯说的一句名言.数学之所以能成为锻炼思维的体操,是因为数学发展始终都在不断地提出问题和解决问题.事实上,问题也是教学的出发点,是思维的起点,有问题才会去思考解决的办法.数学教学正是在不断提出问题、解决问题的循环反复的过程中培养、发展和提高学生的思维品质与学习能力,在教学过程中,“问题”(包括提出问题和解决问题两个方面)的形成、推证和探索过程的质量是衡量数学教学效益和活力的最重要指标,所以“问题”的确是数学教学的心脏.

参考文献

[1] 普通高中课程标准实验教科书数学选修2-3[M].江苏教育出版社,2008,2.
[2] 喻平.数学教育心理学[M].南宁:广西教育出版社,2004.
[3] 刘洪璐,胡晋宾.借鉴文学创作手法进行教学设计的一次尝试[J].数学通讯,2008,3.

方法二：画草图(教师投影图1). 从半径为1，OA 为2的直角三角形，可得 $\angle TAO=30°$，故 $k_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，由对称性得 $k_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

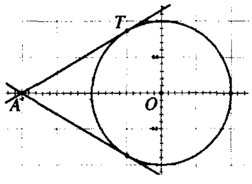

图1

方法三：联立方程组，由判别式为0得 k.

小结：师：对比三种方法，哪一种最简单？

生：当然是方法二.

师：为什么呢？

(与学生一同总结出)

解题之道：

①数形结合——高考考查的四大思想之一；

②简化——三角、平面几何知识的适时运用.

例2 已知圆 $(x-3)^2+y^2=4$ 和过原点的直线 $y=kx$ 的交点为 P、Q，则 $|OP|\cdot|OQ|$ 的值为______.

学生思考后得出：

方法一：求直线与圆交点，用函数知识解.(较繁，难以进行)

师(引导)：题目条件中最抢眼球的是什么？

生：$y=kx$.

教师边几何画板演示(如图2)边解说：观察动和不动，动中有静. 在教师启发下，学生得出：

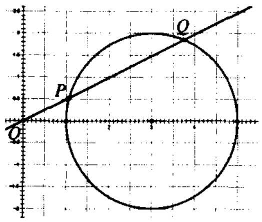

图2

方法二：式子 $|OP|\cdot|OQ|$ 联想向量，利用 $|OP|\cdot|OQ|=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 解决，转化为 $x_1x_2+y_1y_2$，用联立方程组及韦达定理解决.

方法三：利用平面几何中的割线定理和切割线定理解决问题(如图3).

$|OP|\cdot|OQ|=|OA|\cdot|OB|=(3-2)(3+2)=5.$

$|OP|\cdot|OQ|=|PT|^2=3^2-2^2=5.$

师：知道切割线定理的推导吗？

几个学生在说：由相似三角形的相似比.

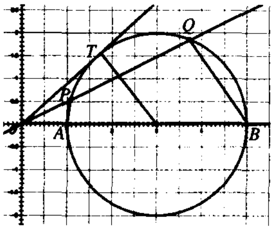

图3

教师：大家可以看见平面几何、向量知识对我们解题帮助很大. 本题 PQ 随着直线的变化而不断变动，动中求静，以静制动. 关注不同的特殊位置，可迅速得出答案，特殊化(几何图形的特殊点、特殊位置)是解决填空题的有效途径.

解题之道：

①特殊化和一般化；

②运动的观点，注意“动中求静，以静制动”.

投影介绍：数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了.

例3 若圆 $x^2+y^2-4x-4y-10=0$ 上至少有三个不同点到直线 l：$ax+by=0$ 的距离为 $2\sqrt{2}$，则直线 l 的倾斜角的取值范围是______.

预留了2分钟，不少学生想到利用特殊位置解决. 解答分两步：

第一步，寻找两个特殊的位置；(即恰有三个点满足要求的位置)教师用几何画板演示(如图4).

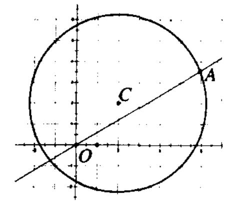

图4

第二步，角度的计算，有两种思路：

(1) 用点到直线的距离，算出斜率 $k=2\pm\sqrt{3}$，出现 $\tan\theta=2+\sqrt{3}$、$\tan\theta=2-\sqrt{3}$，不是特殊角；也有部分学生回答：对应的 θ 为 $75°$，$15°$.

(2) 旋转过圆心的直线，发现倾斜角为 $45°\pm30°$，得 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right]$.

解题之道：“认准角，能优化解题.”“角度改变观念！与命题人的思维同步！”

例4 已知圆 C：$(x-3)^2+(y-4)^2=4$，直线 l_1 过定点 $A(1,0)$.

(1) 若 l_1 与圆相切，求 l_1 的方程；

(2) 若 l_1 与圆相交于 P、Q 两点，线段 PQ 的中点为 M，又 l_1 与 l_2：$x+2y+2=0$ 的交点为 N，判断 $AM\cdot AN$ 是否为定值. 若是，则求出定值；若不是，请说明理由.

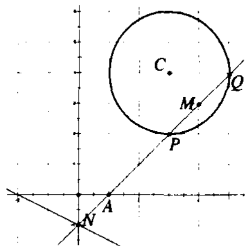

图5

让学生稍作思考后回答：

(1) 略；

(2) 方法一：求 M、N. 设直线为 $y=k(x-1)$，联立方程组解出 M、N 点的坐标，再利用两点间距离公式解出 AM 和 AN 的长度，然后计算得到定值.(其中在计算 M 时可以回避圆方程与直线方程联立，而用直线方程与 PQ 的中垂线方程联立得到)

方法二：不求 M 点. 利用向量 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM})\cdot\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AN}$.

方法三：M、N都不求.连接CA并延长，交直线l_2于点B.利用$Rt\triangle ACM \backsim Rt\triangle ANB$来解决问题.

师：化简计算的途径有很多，通过不同的途径解决问题，我们会发现简化程度不同.

解题之道：

1. 简化计算的途径——向量、平面几何、三角，抓联系、抓本质；

2. 优美解：熟路中的捷径.

三、归纳总结

师：请你用几个关键词概括本课的要点.

生归纳、教师补充并投影：知识、方法、情趣.

四、反思

本课预设的教学目标：①在掌握直线与圆的位置关系的基础上，能解决一些有关直线与圆的综合题；②初步掌握一些简化运算的方法；③渗透数形结合思想和运动的思想；④经历解答的过程，展示运算简化的过程，让学生体验解题研究带来的乐趣.从上述课堂过程简述及课堂反馈：始终围绕着目标进行，且目标的达成度较高.

1. 以适合学生为基础，凸显新颖性

一般的高三复习课，是选几道典型例题、习题，师生讲讲、练练，比较枯燥，缺少新鲜感，难以激发学生的学习兴趣.而这堂“直线与圆综合运用”复习课，听课者无不感觉其新颖.其一，在选题方向上，教师动了一番脑筋，摸准学生在解析几何学习中存在的主要问题(害怕运算，选择方法难)而设计了一个谈话环节，既了解学生学习的困惑，针对性强，体现了以学定教的理念，又能和学生达成知识和情感上的亲密无间；其二，解题之后的归纳小结以“解题之道”呈现，揭示数学思想方法以及哲学道理；其三，在解决问题的过程中，辅之于几何画板的动画演示，促进学生对问题的理解，并揭示出问题的本质；其四，课堂总结，抓住三个关键词：知识、方法、情趣，从三个维度进行，使学生加深对“解题”的理解，让人在感叹之余，品尝其鲜美，体味数学学习带来的乐趣.

2. 以简化运算为主题，凸显数学美

从上课伊始谈困惑，需要简化，例1到例4的每道问题的解决，都在诠释“如何简化”，“简化给解题能带来什么”.例1后教师提出，解决解析几何问题要拓展思路，不仅要与平面几何联系，还要与三角结合；例2的简化是得益于抓住变化中的不变量，这是解决问题的关键所在.例3后指出“认准角，能优化解题”，从斜率入手得出$\tan\theta=2\pm\sqrt{3}$，但非特殊角，转换为从“角”入手，使问题得以简洁、流畅地解决，达到“与命题人的思维同步”，数学与“角”结下不解之缘.例4的解答是整堂课的高潮，从方法一“求解M点坐标，建立不同的方程组”，到方法二“用向量的分解转化，不求M点”，再到方法三“转化为平面几何中的相似问题，两点都不求”，解答一次比一次更简洁，一次比一次更优美.我们知道，解答解析几何问题，难免有一些繁琐，但解决本课的问题(不少是近年的高考题)，由于教师的智慧设计，拓宽视野，不断优化解题过程，让学生在感受转化思想的同时，树立求简意识，欣赏数学的简洁美，从而产生解题之愉悦.除了简洁美外，角、直线和圆这些图形的对称美，斜率、范围表达式的对称美也不断显现，课堂上学生安静地思考、练习，教师的点评提升，动静结合，师生配合默契，张弛有度，无不体现和谐美.还有那几何画板演绎的靓丽图形，再配上教师幽默风趣的语言、遒劲有力的板书，给高三学子紧张的数学复习带来一些视觉、听觉的美的享受.从学生兴奋的表情和满足感，也应验了这一点.

3. 以解题反思为重点，凸显高立意

在每一个问题的那张PPT上都有精彩的文字短句，第1题上方显示：你准会！第2题上显示：算得快！依次为：举一反三，融会贯通.在例2后有投影介绍：数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学；有了变数，辩证法进入了数学；有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了.这些语句，是在激励学生，也在渗透数学文化，使学生在学习数学过程中受到数学文化的熏陶.每一题之后有解题之道.上述例题，充分发掘题目的内在联系，沟通了数学不同分支知识间的联系并整合，才实现解题的突破与优化，体现了辩证法的联系观、发展观，可谓高立意.这些贴切的小结，反映了教者渊博的学识和智慧.作为本课的总结，“你收获了什么?”——“知识、方法、情趣”.是的，高三的数学课堂离不开知识的传授与巩固、方法的总结提炼，但不光是这些，而是以问题为载体，在提升知识、方法的基础上，培养学生的思维能力和个性品质，让学生从中获得学习的乐趣.一堂枯燥乏味的数学课给人繁、累、苦的感觉，而一堂充满活力的数学课，让学生觉得数学“好玩”，可敬又可亲，它根植于生活，又服务于生活.

本课缘于教师的精心设计和高超的驾驭能力，让高三数学复习课，充满生机与魅力，在探索解题规律时，渗透数学思想与数学文化，进行理性思考，揭示数学背后的哲学意境，得一番生活情趣，满足学生一种较高层次的需要，可谓高

巧用“负迁移”,突破“定势思维”*

——一道课本例题变式教学引发的思考

221000 江苏省徐州市第一中学 丁永刚

“变式教学”是指教师有目的、有计划地对命题进行合理的转化,更换命题中的非本质特征,变换问题中的条件或结论,转换问题的内容和形式,配置实际应用的环境,从而使学生在学习中学会举一反三的一种教学方式,常见的有概念变式和习题变式.新授课的概念变式应服务于本节课的教学目的;习题课的习题变式应以本章节内容为主,适当渗透一些数学思想和数学方法;复习课的习题变式不但要渗透数学思想和数学方法,还要进行纵向和横向的联系.

在变式教学中,教师不能总是自己变题,然后让学生练,还要鼓励学生主动参与变题,然后再练习,这样才能更好锻炼学生的思维能力.笔者在讲授苏教版必修5第一章的一道课本例题时设计了如下变式:

1 过程设计

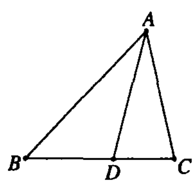

图1

【例题】如图1,在$\triangle ABC$中,AD是$\angle BAC$的平分线,用正弦定理证明$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

证明:在$\triangle ABC$中,由正弦定理得$\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$ ①

在$\triangle ACD$中,由正弦定理得$\frac{AC}{\sin\angle ADC}=\frac{CD}{\sin\angle CAD}$ ②

$\because \sin\angle BAD=\sin\angle CAD$, $\sin\angle ADB=\sin\angle ADC$, $\therefore$①/②得$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

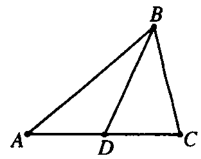

图2

【变题】如图2,在$\triangle ABC$中,已知$AB=\frac{4\sqrt{6}}{3}$, $\cos B=\frac{\sqrt{6}}{6}$, AC边上的中线$BD=\sqrt{5}$,求BC.

生1:设$\angle ADB=\theta$, $AD=x$,则$\angle CDB=\pi-\theta$, $CD=x$.

在$\triangle ABD$中,$AB=\frac{4\sqrt{6}}{3}$, $BD=\sqrt{5}$, $AD=x$, $\angle ADB=\theta$.由余弦定理得$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\theta$,即$\cos\theta=\frac{x^2+5-\frac{32}{3}}{2\sqrt{5}x}$.

在$\triangle BDC$中,$CD=x$, $BD=\sqrt{5}$, $\angle BDC=\pi-\theta$.由余弦定理得$BC^2=BD^2+DC^2-2BD\cdot CD\cos(\pi-\theta)$,即$-\cos\theta=\frac{x^2+5-BC^2}{2\sqrt{5}x}$.所以$\frac{32}{3}-x^2-5=x^2+5-BC^2$,解得$BC^2=2x^2-\frac{2}{3}$ ①.

在$\triangle ABC$中,$AB=\frac{4\sqrt{6}}{3}$, $AC=2x$, $\cos B=\frac{\sqrt{6}}{6}$.由余弦定理得$\frac{\sqrt{6}}{6}=\frac{\frac{32}{3}+BC^2-4x^2}{2\cdot\frac{4\sqrt{6}}{3}\cdot BC}$,即$BC^2$

立意.

4. 以纵横联系为核心,凸显实效性

这堂“直线与圆的综合运用”复习课,不仅涉及直线与圆,因解决问题的需要,还与三角、向量、平面几何中的圆、相似三角形等紧密结合在一起,“立体感”很强,而重点——数学思想和方法的渗透与运用也很突出.作为高三复习课,指向高考,介绍一点答题技巧很有必要.如例题后不忘提醒学生:小题要小“做”,借助图形,抓一些特殊量(点、位置等)可以快速求解,节省了宝贵的课堂时间,体现有效性.例3是对例2的巩固和深化,本质还是找特殊位置,作为检测例2的掌握效果,体现反馈原理,而且实现了解题的优化,凸显出实效.另外,教师在现场娴熟的几何画板演示,并储存了学生答题可能出现的几张图,既有益于学生对问题的理解,也节省了板书时间,提高了课堂的效率.从课堂上学生的情况反馈:正确率较高.

在例4之后,由于时间关系,虽有一个总结,但缺乏对三种方法优劣的具体化的对比,一点小遗憾.但瑕不掩瑜,这样“色”、“味”兼具的美食大餐,学生、教师,谁人不爱?