与其“面面俱到” 不如“以点带面”
——以“双曲线”复习为例

安徽省临泉田家炳实验中学 安振亚 （邮编：236400）

摘　要　高三第一轮复习是建立在学生学完新课的基础上，如果教师还仅仅停留在简单的罗列知识、讲解题目，学生会感到乏味，复习的效果就会打折扣. 与其这样，不如立足于考情，立足于知识间的联系，抓住复习的节点，以点带面，提高复习的效率.

关键词　一轮复习；提高效率；立足考情

高三第一轮复习，教师大都追求的是面面俱到，滴水不漏，把每一个“知识细节”覆盖完，这种复习策略高效吗？笔者认为未必. 考虑到学生已经学习过一遍，再这样复习会感到乏味，复习效果也会打折扣. 与其这样“耗”下去，不如从小处入手，以点带面，直击目标. 下面以“双曲线”复习为例，谈谈看法.

1　考情目标

解析几何是高中数学重要内容之一，在高考中占有重要地位. 纵观近几年的高考试题，解析几何一般设置两小一大或一小一大，分值大约 17～22 分. 而双曲线作为一种重要的圆锥曲线，是高考的“常客”，尤其是它的两大性质——渐近线与离心率，其命题大都围绕二者展开. 相对于椭圆与抛物线，考试大纲对双曲线的要求要低一些，一般是以客观题的形式出现，考查学生的逻辑推理能力和运算求解能力，从中渗透数形结合思想.

2　复习概要

2.1　扎根基础

（1）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为________，离心率 $e=$ ________；

（2）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的渐近线方程为________，离心率 $e=$ ________.

著名心理学家奥苏贝尔曾说过：“如果我不得不把全部教育心理学还原为一条原理的话，我将会说，影响学习最重要的因素是学生已经知道了什么，根据学生的原有知识状态进行教学.”因此，回顾双曲线的渐近线与离心率，目的是激活学生原有的知识状态，构筑进一步学习的平台，为复习作好准备. 尽管双曲线是一种重要的圆锥曲线，是高考的常考知识点，但是笔者仍然抛弃了“大面积撒网”这种费时费力的复习策略，从渐近线与离心率这一小处入手，引领整节内容的复习.

2.2　立足联系

（1）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率 e 与它的渐近的斜率 k 之间的关系：$e=\sqrt{1+k^2}$，

（2）双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的离心率 e 与它的渐近线的斜率 k 之间的关系：$e=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}$.

高考命题注重学科的内在联系和知识的综合性，不刻意追求知识的覆盖面. 而双曲线的渐近线与离心率之间通过 $c^2=a^2+b^2$ 建立联系，而明确二者的联系对缩短解题路径，优化解题思路有很大的帮助.

2.3　联通模拟

（1）（2018 年皖北协作区理 12）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 左右焦点分别为 F_1、F_2，双曲线 $\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{n^2}=1$ 的一条渐近线交椭圆于点 P，且满足 $PF_1\perp PF_2$，已知椭圆的离心率为 $e_1=\frac{3}{4}$，则双曲线的离心率 e_2（　　）

解析　本题涉及椭圆、双曲线的方程与性质、直线的斜率、直线与椭圆的位置关系、垂直等知识，考查逻辑推理能力和运算求解能力，难度大，综合性强. 由双曲线的渐近线与离心率的关系知，解决本题的关键是如何求渐近线的斜率.

方法 1　如图 1 所示，设 $P(x_0,y_0)$，$a=4t$，$c=3t$，则 $b=\sqrt{7}t$，$F_1(-3t,0)$，$F_2(3t,0)$. 椭圆的方程可化为 $7x^2+16y^2=112t^2$. 把 $P(x_0,y_0)$ 的坐标代入，得 $7x_0^2+16y_0^2=112t^2$ ① $\overrightarrow{F_1P}=(x_0+3t,y_0)$，$\overrightarrow{F_2P}=(x_0-3t,y_0)$，由 $PF_1\perp PF_2$ 知 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，即 $x_0^2+y_0^2=9t^2$ ②（也可利用直角三角形斜边的中线等于斜边的一半，即 $|OP|=3t$ 或直线 F_1P 与直线 F_2P 的斜率之积等于 -1）. 由 ①② 可得 $x_0^2=\frac{32}{9}t^2$，$y_0^2=\frac{49}{9}t^2$，故双曲线的一条渐近线的斜率 $k^2=\frac{49}{32}$，离心率 $e^2=\sqrt{1+k^2}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$.

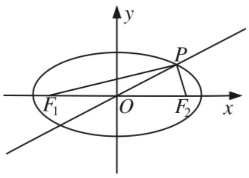

图 1

方法 2　如图 1 所示，设 $|PF_1|=x_1$，$|PF_2|=x_2(x_1>x_2)$，$a=4t$，$c=3t$. 由椭圆的定义知 $x_1+x_2=8t$③ 再由 $PF_1\perp PF_2$ 知 $x_1^2+x_2^2=36t^2$④ 由 ③④ 可得 $x_1=(4+\sqrt{2})t$ $x_2=(4-\sqrt{2})t$. $\tan\angle PF_1F_2=\frac{|PF_2|}{|PF_1|}=\frac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$，不难得出 $\angle POF_2=2\angle PF_1F_2$，故 $\tan\angle POF_2=\tan 2\angle PF_1F_2=\frac{2\tan\angle PF_1F_2}{1-(\tan\angle PF_1F_2)^2}=\frac{7\sqrt{2}}{8}$，即双曲线的一条渐近线的斜率 $k=\frac{7\sqrt{2}}{8}$，所以 $e_2=\sqrt{1+k^2}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$.

点评　本题立足于椭圆，借助于垂直，分别从代数与几何的角度求出双曲线的离心率，而这两种方法的本质源于直线斜率的计算方法. 本题通过双曲线的渐近线与离心率之间的关系，缩短了思维，减少了运算.

（2）（2018 年江南十校联考试题理 16）已知双曲线 C_1、C_2 的焦点分别在 x 轴、y 轴上，渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{a}x$，离心率分别为 e_1、e_2，则 e_1+e_2 的最小值为______.

解析　本题以渐近线为背景，构筑有关离心率的一元表达式，转化为最值问题，从而与基本不等式、函数、导数以及向量等知识建立了联系. 由双曲线的渐近线与离心率的关系可得 $e_1+e_2=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+a^2}$.

方法 1　$e_1+e_2=\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{1+a}{a}\geqslant\sqrt{2a}\cdot\frac{2\sqrt{a}}{a}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $a=1$ 时等号成立.

方法 2　$(e_1+e_2)^2=\left(\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}+\sqrt{1+a^2}\right)^2=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+2\left(a+\frac{1}{a}\right)$，令 $t=a+\frac{1}{a}(t\geqslant 2)$，则 $(e_1+e_2)^2=t^2+2t=(t+1)^2-1\geqslant 8$，所以 e_1+e_2 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

方法 3　设 $f(a)=\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{1+a}{a}(a>0)$，$f'(a)=\frac{a^2-1}{a^2\sqrt{1+a^2}}$. 令 $f'(a)=0$，得 $a=1$. $f(a)$ 在 $(0,1)$ 上递减，在 $(1,+\infty)$ 上递增，所以 $f(a)$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$，即 e_1+e_2 的最小值为 $2\sqrt{2}$.

方法 4　设 $\boldsymbol{m}=(1,a)$，$\boldsymbol{n}=(1,\frac{1}{a})$，$e_1+e_2=|\boldsymbol{m}|+|\boldsymbol{n}|\geqslant 2\sqrt{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\geqslant 2\sqrt{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}=2\sqrt{2}$.

方法 5　设 $m=\sqrt{1+a^2}$，$n=\sqrt{1+\frac{1}{a^2}}$，则 $(m^2-1)(n^2-1)=1$，$\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}=1$. 令 $\frac{1}{m}=\cos a$，$\frac{1}{n}=\sin a$，于是 $m=\frac{1}{\cos a}$，$a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. $e_1+e_2=m+n=\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\cos a}=\frac{\sin a+\cos a}{\sin a\cos a}$. 令 $t=\sin a+\cos a$，$t\in(1,\sqrt{2})$ 则 $\sin a\cos a=\frac{t^2-1}{2}$，故 $e_1+e_2=\frac{2t}{t^2-1}$. 不难判断 $f(t)=\frac{2t}{t^2-1}$ 在 $(1,\sqrt{2})$ 上递减，所以 $e_1+e_2\geqslant 2\sqrt{2}$.

方法 6　易得 $\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2}=1$，$(e_1+e_2)^2=(e_1+e_2)^2\cdot(\frac{1}{e_1^2}+\frac{1}{e_2^2})=(\frac{e_1^2}{e_2^2}+\frac{e_2^2}{e_1^2})^2+2(\frac{e_1}{e_2}+\frac{e_2}{e_1})+2\geqslant$

8. 即 $e_1+e_2\geqslant 2\sqrt{2}$，当且仅当 $e_1=e_2$ 时等号成立.

点评 本题是双曲线的渐近线与离心率之间关系的直接应用，简化了思路，为求最值节省了时间与精力. 又由求最值方法的多样性，培养了学生思维的灵活性，反映了命题的一般要求.

2.4 直击高考

(1)(2017 年全国卷Ⅰ理 15) 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的右顶点为 A，以 A 为圆心，b 为半径作圆 A，圆 A 与双曲线 C 的一条渐近线交于 M、N 两点. 若 $\angle MAN=60°$，则 C 的离心率为______.

解析 本题考查双曲线的方程、顶点、渐近线以及离心率、圆的方程、直线与圆的位置关系、三角形等知识，对逻辑推理与运输求解能力有一定要求.

方法 1 设渐近线方程为 $y=kx$，圆 A：$(x-a)^2+y^2=b^2$，联立方程 $\begin{cases} y=ky, \\ (x-a)^2+y^2=b^2, \end{cases}$

消去 y 得 $(1+k^2)x^2-2ax+(a^2-b^2)=0$.

再设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=\frac{2a}{1+k^2}$，$x_1x_2=\frac{a^2-b^2}{1+k^2}$.

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\left(\frac{2a}{1+k^2}\right)-4\frac{a^2-b^2}{1+k^2}}=b$，整理得 $3k^4-k^2=0$，所以 $k^2=0$(舍去) 或 $k^2=\frac{1}{3}$. 故 $\mathrm{e}=\sqrt{1+k^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

方法 2 如图 2 所示，作 $AB\perp MN$，则由 $\angle MAN=60°$ 知 $\triangle MAN$ 是正三角形，$|AB|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABO$ 中，

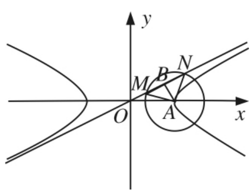

图 2

$|OB|=\sqrt{|OA|^2-|AB|^2}=\sqrt{a^2-\frac{3}{4}b^2}$，$k=\frac{|AB|}{|OB|}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\sqrt{a^2-\frac{3}{4}b^2}}$，又 $k=\frac{b}{a}$，故 $\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}b}{\sqrt{a^2-\frac{3}{4}b^2}}=\frac{b}{a}$，$k^2=\frac{1}{3}$，所以 $e=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

方法 3 由 $\triangle MAN$ 是正三角形，得 $|AB|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，直线 MN：$y=\frac{b}{a}x$，即 $\frac{b}{a}x-y=0$，$A(a,0)$，$|AB|=\frac{b}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}$，因此 $\frac{b}{\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$e=\sqrt{1+k^2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

点评 本题的突破口在于如何使用“$\angle MAN=60°$”. 通过圆的性质构造正三角形，建立双曲线的渐近线与离心率的联系，从而求出离心率.

(2)(2017 年全国卷Ⅱ理 9) 若双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线被圆 $(x-2)^2+y^2=4$ 所截得的弦长为 2，则 C 的离心率为______.

解析 本题考查的知识涉及双曲线方程、性质、圆以及直线与圆的位置关系、三角形等.

方法 1 设双曲线的渐近线方程为 $y=kx$，即 $kx-y=0$. 圆心 $(2,0)$ 到直线 $y=kx$ 的距离 $d=\frac{|zx|}{\sqrt{1+k^2}}$. 再由弦长、半径以及圆心距之间的关系得 $d=\sqrt{3}$，故 $\frac{|2k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$，解得 $k^2=3$，$e=\sqrt{1+k^2}=2$.

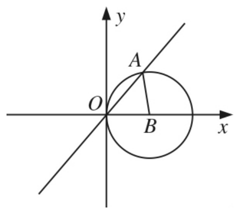

图 3

方法 2 如图 3 所示，$\triangle OAB$ 是正三角形，故渐近线的斜率 $k=\sqrt{3}$，故 $e=\sqrt{1+k^2}=2$.

点评 本题与上题相比，难度降低，若结合图形，会有助于解题.

3 反思

3.1 立足考情，有的放矢

高三复习，不仅要照顾到基础知识，也要注意知识之间的联系与综合. 在具体操作中，要放弃经验至上的思想，要着眼于教材，立足考情，认真研读考试大纲与考试说明，做到心中有数，方能有的放矢. 复习课不同于新课，复习课大都省略了知识生成过程，省略了概念等的归纳概括过程. 复习课以学生已学为基础，如果再面面俱到、

滴水不漏的展开，不仅费时费力，事倍功半，学生也容易生厌，影响学生的复习兴趣与积极性. 故教师要立足考情，合理设计复习课堂，抓住内容的要点与关键点，以点带面，打造“生命课堂”.

3.2　立足联系，培养思维

《考试大纲》指出“注重学科的内在联系和知识的综合性，不刻意追求知识的覆盖面. 从学科的整体高度和思维价值的高度考虑问题，在知识网络的交汇点处设计试题，使对数学基础知识的考查达到必要的深度.”[1]因此复习要立足于知识间联系，构筑知识网络. 章建跃博士指出：“数学是培养思维能力的最佳载体.”而高三复习课基于知识的综合性与联系，思维量一般更大和对思维的灵活性要求也更高，因而对锤炼思维有很大的帮助，有利于培养学生的思维能力.

3.3　立足“小处”，以点带面

高三复习要巩固基础，提升能力. 考虑到高三时间的紧迫性，内容的综合性，如若把复习课上成了新课，想必不利于备考，也不利于提升学生的能力. 因此，教师要遵循复习课的规律，不拘泥于“细腻”，与其面面俱到，不如尝试从小处入手，以点带面，推动复习课有效开展. 就像双曲线的渐近线与离心率，二者通过参数 a、b、c 与双曲线的方程以及其它性质建立了联系. 复习不妨从二者入手，顺藤摸瓜，连带出其它知识，既省时省力，又能抓住关键，可谓一举两得.

参考文献

1　教育部考试中心. 考试大纲[M]. 高等教育出版社. 2018(22).

（收稿日期：2018－10－27）

（上接第 18 页）

在解决数学问题中获得一些基本知识、学会一些基本技能之外，终极目标是培养核心素养. 数学核心素养在解决问题中生成，大致可以分为三个阶段：

第一阶段是解决问题. 对具体的数学问题能够彻底解决，对过程无可置疑，对结果毫无疑义，这是初级阶段，也是数学核心素养在学生中生长的必经历程.

第二阶段是强化解决问题的过程. 解决问题本质上是一种过程，可能是思考的过程或者智慧结晶的过程. 因此以素养为本、致力于能力的问题，在本质上是一种强调过程的解决问题. 这种完整的解答过程，无论繁与简，优与劣，甚至对与错，都应在解决问题中凸显，如独立思考的过程、书写的过程、交流展示、自我评价的过程等.

第三阶段是对问题智慧解决的过程. 现在提出的解决问题目标不是一维的而是三维的，不仅重视结果（知识），还要重视过程（智慧）、重视学科素养的培养. 首先对解决方法和过程进行优化选择，然后明确在具体环节、以最易接收的方式融入哪（几）个数学核心素养.

解决问题的过程要突出什么？就是要突出教师的教学方式，而改变教师的教学方式只是手段，不是目的，目的是要改变学生的学习方式，最终改变学生的思维方式，在过程中培育数学核心素养.

学生的个性化成长，特别是数学核心素养成长成为数学学习的中心目标之后，优质的数学问题将逐步演变为数学素养的平台中心、测评中心、活动中心和个性化教育培育中心.

总之，数学核心素养的形成，不是依赖单纯的数学问题，而是依赖学生参与其中的数学活动；不是依赖记忆与理解，而是依赖感悟与思维；它应该是日积月累的、自己思考的经验的积累. 基于核心素养的数学问题，要求教师要抓住数学问题的关键，结合学生的认知规律合理优化数学问题，启发学生充分思考、展示、交流，让学生在解决问题的同时，深度感悟数学知识的生成、发展过程，积累数学思维和数学实践的活动经验，形成和发展核心素养.

将核心素养的培养融入到解决问题过程当中，学生数学核心素养才会生根、发芽、成长，终究学会在关联，甚至在综合的环境下，从数学角度发现问题，可以用数学的思维方法分析问题，还可以用数学的方法解决生活中的实际问题.

（收稿日期：2018－11－06）