

把握位置关系 凸显方程功能

——高三第一轮复习课课例《直线与圆锥曲线的位置关系》

433000 湖北仙桃八中 代伟李琦 433000 仙桃市教科院 曹时武

2011年湖北省高中青年数学教师优秀课评比与观摩活动于2011年11月10日在荆州落下帷幕,我校教师李琦作为仙桃市参赛选手之一,所讲课题《直线与圆锥曲线的位置关系》荣获省一等奖.现将这一课的教学实录整理如下:

1 温故导入课题 方程登台亮相

师:我们知道,直线与圆的位置关系有三种:相交,相切,相离.你还记得它们的判定方法吗?

生₁:圆心到直线的距离 d 与半径 r 进行比较, $d < r$ 时,直线与圆相交, $d = r$ 时直线与圆相切, $d > r$ 时直线与圆相离.

师:不错,这是几何法,还有其他的方法吗?

生₁:还可以把直线与圆的方程联立起来,消元以后求方程的判别式, $\Delta > 0$ 时,直线与圆相交, $\Delta = 0$ 时,直线与圆相切, $\Delta < 0$ 时,直线与圆相离.

师:很好,这位同学所说的是代数法,其实质是将交点个数问题转化为对应的方程组的解的个数问题,进而转化为方程根的问题,借助判别式来判断.

(板书) 1. 交点的个数 \Rightarrow 方程根的个数

师:从这里我们能看到,方程的判别式有判定位置关系的功能.

(板书) ①判定

师:这种方法虽然没有几何法直观,但它具有一般性,今天这节课,我们主要来探讨如何运用这种方法,并借助方程这一工具来处理直线与圆锥曲线的位置关系问题.(板书课题)

2 讨论交点个数 凸显判别功能

师:首先我们来看交点问题.

(幻灯片展示)问题1 已知直线 l 过定点 $M(0, 2)$,抛物线 $C: y^2 = x$,直线 l 与抛物线 C 何时有一个公共点?两个公共点?没有公共点?

探究1 用什么方法判断公共点个数问题?

(给学生约10秒钟读题)

师:讨论过定点的直线与抛物线的交点个数,请同

学们用刚才的方法和工具试一试.

师:哪位同学告诉我你的做法?

生₂:设直线方程为 $y = kx + 2$,与抛物线方程联立,消去 y 得到一个方程, $\Delta > 0$ 时,有两个公共点, $\Delta = 0$ 时,有一个公共点, $\Delta < 0$ 时,没有公共点.

师:这是一个分类讨论的问题,他考虑的是否全面呢?

生₃:还有斜率不存在时,直线与抛物线只有一个公共点.

师:补充的很好,还有吗?

生₃:还有方程的二次项系数为0时,也只有一个公共点.

师:这位同学既细心又严谨,注意到用点斜式设直线时,要注意斜率是否存在.同时当所得方程的二次项系数含参数时,要注意讨论.在几位同学的共同努力下,我们得到了完整的解答过程.(幻灯片展示过程)

师:我们也可以通过图形观察一下(演示动画),与我们的计算是一致的.从这道题的解题过程来看,我们不仅要用好方程,而且还要善于结合图形的直观性来观察特殊位置时的交点情况.

3 研究交点范围 凸显结构功能

师:下面我们将这个问题拓展一下,当交点有范围限制时,又该怎样用这种方法和方程这个工具来处理呢?请看变式.

(幻灯片展示)变式 过点 $(0, 2)$ 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的两个交点在 y 轴右侧,求直线 l 的斜率的取值范围.

(学生小声议论)

师:交点在 y 轴右侧,仅用判别式行吗?坐在一起的同学可以互相讨论一下.

(学生讨论时教师巡视并指导,约1分钟)

师:解决这样的问题,有哪些招数呢?哪位同学告诉我?

生₄:联立直线与椭圆方程,消去 y 得到一个方程,判

别式大于0 $x_1+x_2>0$ $x_1x_2>0$.

师:这招不错,将“y轴右侧”这个条件转化为根的分布问题来处理,很全面,滴水不漏.还有没有哪位同学有不同的招数?

生₅:要使交点在y轴右侧,直线斜率小于0,判别式大于0.(学生一边说教师一边演示动画)

师:这招更厉害了,将“形”分析的淋漓尽致,简洁明快,把数与形完美的结合起来了.两位同学虽然处理的方法不同,但本质是相同的,都是由“形”向数的等价转化.这两招都挺管用的,相信同学们很快就能算出结果,左边的同学用方案1,右边的同学用方案2,比一比,看谁做得又快又好!

(2分钟后,左右两边的同学各自报上结果 $k < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.)

师:这个结果是正确的.(幻灯片展示过程)

师:下面我们来回顾一下这道题,当交点有范围时,可以转化为方程根的分布问题来解决,进而求解控制不等式组.

(板书) 交点有范围 \Rightarrow 方程根的分布 \Rightarrow 求解控制不定式组

4 通过反例辨析 凸显检验功能

师:我们已经比较全面的研究了交点问题,在位置关系中,人们更感兴趣的是相交这种情况,因为相交就会有会产生弦,比如定点弦,中点弦,焦点弦,弦长等,至于焦点弦,我们后面再专门研究,接下来,我们来看一个中点弦问题.

(幻灯片展示) 问题2 (人教A版《数学》选修2-1P62B组4) 双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ 过点 $P(1, 1)$ 能否作一条直线 l 与双曲线交于 A, B 两点,使点 P 是线段 AB 的中点?

探究2 假如存在这样的直线 l ,你能求出这条直线吗?

(给学生约10秒钟读题)

师:这是一个讨论存在性的问题,处理这类问题通常首先应该…?

生:假设存在这样的直线.

师:那么要确定这条直线,它经过已知点 P ,通常我们还要确定…?

生:斜率!

师:对,就是斜率!注意到 P 是弦 AB 的中点,求中点弦的斜率,你想到了什么方法?

生₆:点差法.

师:能说说具体的做法吗?

生₆:将两个端点 A, B 坐标代入曲线方程后作差,求直线斜率.

师:谢谢这位同学给我们提供了一个很好的思路.还有其他的做法吗?

生₇:设直线方程为 $y-1=k(x-1)$ $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$ P 点坐标就是 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$, 联立直线与双曲线方程,再用根与系数的关系解出斜率.

师:这位同学利用中点坐标列出等式,进而求出斜率,也是一种很不错的方法.下面左边的同学用方案1,右边的同学用方案2,试试看!

(约3分钟后,左右两边的同学各自报上结果斜率为2.)

师:看来大家结果一致,都求出直线 $y=2x-1$,这是最后的答案吗?认为还需要继续验证的同学举起你的右手.

(很多学生显出奇怪的表情,此时有一个同学举手.)

师:大家意见不统一啊!那么我们就来一场辩论,请这位举手的学生作为辩论的正方代表,不举手的学生就是认为不需要验证了,你们作为辩论的反方.首先请正方阐述你的观点.

生₈:还要验证判别式是否大于0.

师:你是怎样发现的?

生₈:因为直线与双曲线要相交.

师:反方,哪位代表来发表意见?

(没有人回答)

师:没有人啊,那么你们是否同意正方的观点呢?

生:同意!

师:哦,原来你们已经倒戈了啊!那么,我宣布,正方获胜!同学们,是不是应该来点掌声送给他!

(学生鼓掌)

师:看来有时候,真理是掌握在少数人手中的啊!接下来,请同学们将直线方程代入双曲线方程,求一下判别式,迅速验证,算出结果请举手告诉我.

(约40秒后)生:判别式小于0.

师:那么这样的直线存在吗?

生:不存在.

(幻灯片展示过程)

师:我们也可以通过图形来观察一下.(几何画板演示)没有交点,跟我们刚才的计算是一致的.这个问题给了一个教训,直线与圆锥曲线相交时,要注意用判别式来进行检验,否则就容易不知不觉犯下错误.

师:从这里我们能看出,判别式还具有检验功能.

(板书)②检验

5 尝试综合应用 凸显计算功能

通过前面的解答,我们已经看到了方程的优越性,那么我们来小结一下,方程的功能有哪些?

(板书)方程的作用:

师:除了判定和检验位置关系,方程还可以帮助我们求什么?

(无人回答)

师:想一想,在刚才这个题目中,我们中点的坐标是如何表示的?

生: $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$

师: x_1+x_2, y_1+y_2 是如何得到的?

生:方程的根与系数的关系

师:不错,在这里,方程还帮我们表示了中点.

(板书)③求中点坐标

师: x_1+x_2, y_1+y_2 除了在中点坐标中用到,还有哪里会用到呢?

生:弦长.

师:一语中的!这是方程的第四个作用,求弦长.

(板书)④求弦长

师:原来方程在处理直线与圆锥曲线的位置关系时发挥了这么重大的作用,不得不令人对它高看一眼.接下来,我们继续来感受方程的神奇功能.

(幻灯片展示)问题3 斜率为1的直线 l 与抛物线 $y^2=x$ 交于 A, B 两点,在 y 轴上是否存在点 M ,使得 $\triangle MAB$ 为正三角形?如果存在,求出点 M 的坐标,如果不存在说明理由.

探究3 当 $\triangle MAB$ 为正三角形时,点 M 应满足哪些条件?

(给学生约10秒钟读题)

师:这又是一个讨论存在性的问题,处理这类问题通常首先应该…?

生:假设存在这样的点 M .

师:那么我们将它的坐标设为 $M(0, m)$,要求 m ,这是一个定量问题,经验告诉我们,定量的最好工具是方程,同学们,这又是方程啊!接下来,我们就来寻找与 m 有关的条件列方程.

(学生思考)

师:想一想,要使 $\triangle MAB$ 为正三角形时,点 M 应满足哪些条件?

生: $|MA| = |MB| = |AB|$

师:不错,这是一种方法,但是大家想想, M, A, B 三点坐标不确定,可想而知,用三边关系计算量较大.再想想,坐在一起的同学可以互相讨论一下.

(约1分钟后)师:哪位同学把你们交流的结果跟大家分享一下?

生₉:取 AB 中点 Q ,连接 MQ ,它的斜率为-1.

师:这个思路棒极了!那么 M 点的坐标设出来了, Q 点得坐标应该怎样处理呢?

生₉:设直线方程 $y=x+b$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,联立直线与抛物线方程,消去 x 得到关于 y 的方程,用韦达定理可以表示出 Q 点坐标来,代入 $k_{MQ}=-1$,就可以列出一个方程了.

师:哦,原来又回到方程上了啊!这位同学的思路很清晰,表达也很准确.不过注意到设了两个参数 m 和 b ,一个方程能把它们都解出来吗?

生₉:…

师:再想想,相信你一定能找到其它的条件将它们求出来.哪位同学已经想好了?

生₁₀:还有在正 $\triangle MAB$ 中, $|MQ| = \frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$

师:这个发现很重要!那么, $|MQ|, |AB|$ 是否可求呢?

生₁₀: $|MQ|$ 可以用点到直线的距离公式求, $|AB|$ 可用方程根与系数的关系求.

师:还是方程啊!谢谢这两位同学为我们分析的方法.这样两个方程就能解出 m 和 b 了.哪位同学到黑板上计算?

(一位同学到黑板上演排,计算很正确.)

师:(幻灯片展示过程)这位同学的计算过程很有条理,写得很好.通过这道题目的解答,我们可以看到,通

过方程,我们一得中点,二得弦长,最终达到了定量的目的。(板书:⑤定量)

师:在解析几何中,要求解某个量,往往寻找与它相关的几何关系式,用代数方程来求解。

(板书)求解某个量 \Rightarrow 寻找几何关系式 \Rightarrow 用代数方程求解

6 师生共同小结 优化方程功能

师:本节课我们一起复习了直线与圆锥曲线的位置关系,下面同学们一起回顾一下,今天你学到了哪些方法,解决了哪些问题,有哪些收获和体会?

生₁₁:主要学习了用方程来解题,交点个数可以转化为方程的根的个数来判断,交点范围可以转化为方程根的分布问题来处理。

师:很好,还有哪位同学来谈谈你的体会?

生₁₂:还有用点斜式设方程时要注意斜率是否存在,所得方程的二次项系数含参数时,要讨论它是否为0。

师:概括的说,这节课我们主要讲了1,2,3,4,即:利用一个工具(方程),解决两个问题(交点和弦),三个注意(斜率是否存在,方程是否二次,结合图形分析),四种数学思想(数形结合思想,函数与方程思想,转化与化归思想,分类讨论思想)。

(幻灯片展示课堂小结)

师:最后,请同学们下去完成几道课本上的作业。

(幻灯片展示:人教A版《数学》课本选修2-1P₈₀A组7,8,9P₈₁B组3)

点评 (仙桃市教科院曹时武老师点评)

课如戏。

戏有戏魂,戏魂就是贯穿全剧的人物和事件的线,有明线也有暗线。课亦如此,课有了魂,内容变得有血有肉;倘若没有魂,便是一副空皮囊,尤其是数学的复习课,没有了魂,内容就成了毫无联系的几个孤立的题。

本节课是高三一轮复习课,直线与圆锥曲线的位置关系纷繁复杂,问题多种多样,有交点问题,弦的问题,有定性和定量研究的定点和定值问题,还有动态下的范围和最值问题等等。这是本节内容的第一课时,截取位置关系中的什么内容,确定这一节课的“魂”应该是什么,这些,教师用她的实践给出了智慧的回答。

内容 选取位置关系中常见的交点问题以及人们最感兴趣的相交这一种情况,从而引申到定点弦、中点

弦和弦长问题。

“魂”:以研究解析几何的基本方法和工具——方程来贯穿全课始终,突出了方程在解决解几问题的基本功能:判别功能、检验功能、结构功能和计算功能,包括定量功能。

有了这个魂,所以本节课目标明确,重点突出,问题和问题之间,逻辑结构层次分明,联系紧密,犹如一出结构完整的戏。

戏有情,戏,有悲欢离合,所以剧情有跌宕起伏。课亦如此,课也讲究有悲有喜,在课堂上,教师与学生一同体验情感的喜怒哀乐,从本节课的动态生成的过程中可以看出,学生经历了这么一个情感的变化:

问题1:(心情)轻松 \rightarrow (心有)遗憾 \rightarrow 心有灵犀。

拓展变式:从尝试解决问题的对策到个体方案的成功,再到同学的其他新方案使视野更广,其情感经历了信心不足到有了信心到信心更坚定这么一个升华过程。其最高境界是领悟到处理此类交点范围问题的方法,即无论是椭圆还是抛物线或双曲线都是化归为根的分布问题来解决,突出了方程的结构功能——“魂”。

问题2是通过一个反例辨析来突出方程的检验功能,过程中学生的情感又经历了一个由兴奋到迷惘最后达到透彻醒悟的全过程。

最后一个问题是综合应用方程的功能来解决一个复杂的弦的问题,教学中学生的情感经历也是复杂的,开始是对解题方向的艰难探索,由于要确定这样的M点,因此要确定M点的纵坐标m,这是一个定量问题,想到了方程,于是看到解决问题的希望,然后继续探寻M点满足的几何条件,虽然有挫折但最终还是找到了两个简洁的方程,于是云开雾散,最后通过方程来计算终于获得成功,其喜悦之情溢于言表,将情感体验推向了高潮。

课要有情,要用能生情的内容来引导学生触发情感,同时,教师也要像戏中的演员一样,用自己丰富的情感来驱动学生的情感,有了情,课就生动起来,学生在情感的驱动下,就会积极主动地动口、动脑、动手,倘若没有情,想一想,那是多么的枯燥无味啊!

但愿我们的课,尤其是高三的复习课,能够像戏一样有一个坚实的魂,更能够产生波澜壮阔的情!

(收稿日期:20111121)