

# 大概念视角下基于UbD理论的复数单元教学设计

张颖, 唐恒钧

(浙江师范大学教育学院, 浙江金华 321004)

**摘要:**逆向教学设计以促进学生理解为目标,与当前倡导的大概念单元教学不谋而合.文章对新课程复数单元的教学现状进行分析,在“复数的概念与运算的一致性”这一大概念统摄下构建逆向教学设计,重组复数单元内容使其进一步结构化,以促进学生对知识的整体性理解.追求理解的教学设计为一线教师提供了新思路,并能够有效促进学生数学核心素养的形成.

**关键词:**复数教学;大概念;UbD理论;单元教学设计

**中图分类号:** O12

**文献标识码:** A

**文章编号:** 1003-6407(2023)08-0004-04

## 1 问题提出

《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》(以下统称《课标》)中已经明确:教学要重视以学科大概念为核心,使课程内容结构化.逆向教学设计(Understanding by Design,简称UbD)理论被认为是落实大概念的一种典型的设计思路,得到了越来越多的关注<sup>[1]</sup>.该理论倡导逆向教学,即

从大概念出发,重视“理解”,强调“整体”,具体步骤包括:分析教学背景—明确学习目标—确定评价证据—规划教学过程<sup>[2]</sup>.基于UbD理论的教学能够帮助学生更全面地理解知识之间的相互关系,并有效地运用所学知识.

虽然复数在高考中的比重较小,试题相对简单,但由于复数概念抽象,单纯的记忆性教学往往

## (上接第3页)

至此,学生应该能够想象到,当自变量 $x$ 的值足够大时,指数函数的值远大于幂函数、对数函数的值.因此,不管 $m$ 的正负,当自变量 $x$ 的值足够大时, $e^x > x^2 - m \ln(x+2) + 2$ 成立,从而

$$f(x) \geq e^x - x^2 - |m| \ln(x+2) - 2.$$

由上述证明过程可得

$$f(x) > x^2 - |m|x - 2,$$

其证明与 $m < 0$ 时一致.

**问题9** 我们已经得到例1的完整证明,请同学们再思考:命题者命制这道试题的过程是怎样的?我们能不能也命制出相似的题目?

至此,学生已能看透题目的本质.若 $f(x) = e^x + \varphi(x)$ , $\varphi(x)$ 由对数函数和幂函数构成,则一定存在 $x_0$ ,使得 $f(x_0) > 0$ .又当 $x = -1$ 时,参数 $m$ 失效, $f(-1)$ 为定值,因此原解析式后面的 $-2$ ,其目的是使 $f(-1) < 0$ .

留一点时间让学生编拟出类似的题目,教师选择部分有代表性的题目进行点评,如 $f(x) = e^x -$

$mx^3 + m \ln(x+1) - 3$ 等.

**教学反思** 教师没有因为例1解答结束而结束讲解与思考,而是继续提出问题.一方面,反思提升,精进过程;另一方面,自主命题,逆向思维,促进思维进阶,认识问题本质,生成智慧,进一步感受直观想象对于问题解决的作用.

## 5 结语感悟

“直观想象”被《课标》作为核心素养之一提出,是发现与提出问题、分析与解决问题的重要手段.初中数学中,代数与几何是分开学习的;高中数学则强调数形结合,函数、三角函数等体现以形助数,解析几何、向量、空间向量等体现以数解形,而这些内容正是高中数学的核心.“直观想象”除了数形结合外,它更强调“想象”,要“想象”形的变化趋势,甚至通过形的变化趋势合理预测结论、指引解题方向,剖析问题本质特征,是破题的抓手,是构建抽象结构的思维基础.因此,“直观想象”核心素养指引下的解题教学更有利于培养学生的发散与创新思维能力,应成为解题教学的风向标.

收文日期:2023-04-18;修订日期:2023-05-31

基金项目:全国教育科学规划课题教育部重点课题(DHA200318)

作者简介:张颖(2000—),女,浙江台州人,硕士研究生.研究方向:数学教育.

无法帮助学生真正理解复数.因此,复数被认为是典型的“容易教的难点课”.已有学者从数学史视角出发,帮助学生更好地理解复数的来龙去脉,使知识和思想方法更加结构化<sup>[3-4]</sup>.复数的扩充和运算必须遵循已有的扩充规则和运算法则,在数学大概念下设计复数单元教学具有整体性和连续性,更有助于学生理解复数的本质.

基于此,本文以“复数”单元为载体探讨以下问题:

1) 新人教 A 版《普通高中课程标准实验教科书·数学》(以下统称“新教材”)对复数内容做了哪些调整,并对教学提出了怎样的要求?

2) 当前复数教学中存在的问题和重难点是什么?

3) 大概念视角下基于 UbD 理论的复数单元教学是怎么样的?能化解当前教学中的困境与重难点问题吗?

## 2 新教材复数单元的内容变化与教学现状

### 2.1 教学内容的变化

《课标》通过对复数内容的重组,建立起核心素养与课程教学的内在联系.同时,新教材反映了复数教学内容的变化.从新教材位置上看,新教材更加凸显数学知识之间的内部联系,并强调了复数内容的教学意义.具体来说,“复数”由选修内容调整为了必修内容并放置在“平面向量及其运用”之后,便于突出复数的几何意义<sup>[5]</sup>.从内容设置上看,新教材更加注重复数知识的完整性,增加了选学内容“复数的三角表示”,注重复数与相关知识的联系,并强调了复数的几何意义.从教学建议上看,新教材从强调知识的传输转为注重知识的解释.通过“完整地”介绍解方程的历史发展引入复数系的扩充,帮助学生理解为什么和怎么扩充数系.此外,新教材更加注重单元整体教学,将复数教学沿着运算对象的基本路径展开.从例题和习题设置上看,新教材增加了复数范围内解方程的题型,与复数的扩充部分相呼应.

### 2.2 教学现状

复数是高中数学中相对抽象的研究对象,未受到广大师生的充分重视.一方面,由于复数本身的发展过程十分曲折,新教材受篇幅限制未能揭示复数及其运算的数学本质和思想方法;另一方面,复数在高考中难度较小且所占分值不大,学生可以通过一定量的习题训练得分.因此,学生在学习复数内容后往往仅机械式的记忆了相关知识,而不理解

复数及其运算产生的根本原因.

数系由数的概念和数的运算这两个要素构成,同时数系扩充的历史也至关重要<sup>[6]</sup>.在复数教学中存在以下难点:

1) 虚数单位的引入是本章的一个难点.由于生活中很难找到具体实例来支撑“虚无缥缈”的虚数,学生对负数不可开平方的固化思维也会造成影响.破解这一难点的关键在于引入复数的发展简史,帮助学生了解复数产生的来龙去脉.

2) 如何扩充数系是复数教学中的另一个难点.学生对数系扩充规则的认识比较肤浅,因此既要考虑数系扩充规则的普适性,又要注意复数的特殊性,引导学生在合乎“一定”之规下扩充数系.

3) 复数与多个知识点之间的联系较为抽象,掌握“联系性”思想也是一个难点.破解这一难点的关键在于强调复数与其他知识之间的联系并进行类比教学,必要时可借助框图直观表示,复数与相关领域知识之间的联系如图 1 所示.

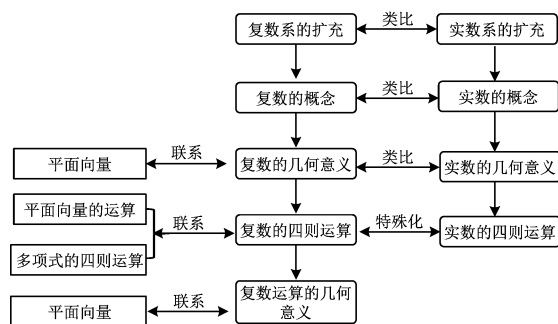


图 1

## 3 大概念视角下基于 UbD 理论的复数教学设计

### 3.1 大概念的提取

数学学科大概念反映了数学本质,是将数学关键思想和相关内容联系起来的统摄性表达,具有体现学科核心素养、有效串联教学内容以及促进学生深度理解和终身发展等特征<sup>[7]</sup>.巩子坤教授认为,数的发展过程实质上是计数单位的发展过程.数的概念与运算之间通过计数单位建立起一致性,即数是计数单位的表达;加、减运算的关键在于相同计数单位上数字的相加减,而乘法运算则是计数单位与计数单位相乘,或者数字与数字相乘<sup>[8]</sup>.这样的理解方式可以帮助学生更好地理解数的本质和数学中各种运算规律的产生和应用.

本文将“复数的概念与运算的一致性”作为单元大概念,用以统整核心概念,包括计数单位、计数单位的基本运算、加法和乘法运算律、复数及运算的几何意义等内容.具体地,将“复数的概念”和

“复数的三角形式”整合成第一个子单元,主题为“复数的概念与表示”;将“复数的四则运算”和“复数的乘、除运算的三角表示及其几何意义”整合成第二个子单元,主题为“复数的四则运算及意义”,单元整体教学设计路径如图2所示。

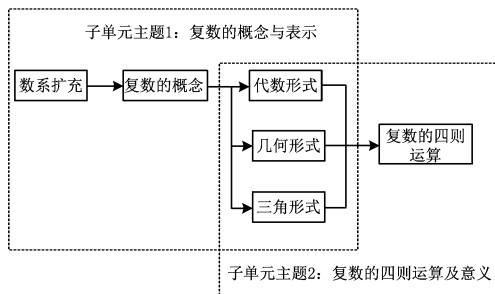


图2

### 3.2 大概念视角下基于UbD理论的复数单元教学设计

基于UbD理论的单元教学设计,首先,是通过分析教学背景明确核心素养和单元大概念,并利用问题过滤器确定基本问题,在此基础上明确学生应达到的理解目标和预期结果;其次,是需要根据预期结果确定评价依据,评估学生对知识达到何种程度的理解;最后依据WHERE TO原则(该原则是威金斯和迈克泰格在大概念教学计划中提出的),可以针对教学目标和评价依据设计活动,具体包括指明学习方向(W)、吸引与保持(H)、探索与使能(E)、反思与修改(R)、评价(E)、定制(T)、组织的过程(O)规划教学。

#### 阶段1 分析教学背景。

《课标》中提出“将数学学科核心素养的培养贯穿于教学活动的全过程”的教学建议,因此,需要考虑学生已经具备哪些知识和经验,并主要培养学生哪方面的核心素养。在义务教育阶段,“数与式”的学习使学生掌握了从有理数系扩充到实数系的一般方法;向量的学习让学生掌握了研究一般运算对象的基本路径。然而,学生对数的认识依然是零碎的、不完整的,从数学背景中抽象出数学概念的能力也比较弱。因此,复数作为一种具有抽象性和逻辑推理能力的数学概念,可以有效地培养学生的数学抽象、逻辑推理、数学运算等素养。

#### 阶段2 明确教学目标。

复数作为中学阶段数系扩充的“末班车”,不仅是认识“数”的阶段终点,更是开启与其他知识联系之旅的新起点。根据图2的教学设计路径,在大概念“复数的概念与运算的一致性”的视角下,可以分别确定两个子单元的基本问题。基本问

题旨在引导学生通过类比的方式深入理解复数的概念及其运算规律,从而更好地应用复数进行数学探究和解决实际问题。“复数”逆向单元设计的阶段2设计具体如下:

**子单元的基本问题** 1)“复数的概念与表示”的基本问题:类比实数扩充过程,我们如何得到复数系及如何表示复数?

2)“复数的运算及意义”的基本问题:类比实数运算,复数四则运算在不同表示形式下有何表现?

**核心素养下的理解目标** 1)学生能够理解复数在数学中的地位和作用,明确学习复数概念和运算规律的必要性和重要性;

2)学生能够掌握复数的基本概念、3种表示形式及其之间的转换方式;

3)学生能够掌握复数的四则运算规律,能够描述和解释复数及四则运算的几何意义,并能够应用复数进行简单的运算操作并解决实际问题。

#### 阶段3 确定评价证据。

为了更全面地评价学生对学习目标的掌握情况,可以根据基本问题的要求设计不同的表现性任务。

**表现性任务及评价方式** 1)复数的概念与表示:通过小组合作总结“数”的构成要素,从计数单位角度理解复数的构成,并比较实数的表示方式与复数的3种表示方式的联系和区别,最终以专题作业形式汇报研究成果;

2)复数的运算及意义:教师设计“寻找复数宝藏”游戏,让学生通过寻找隐藏在复平面上的复数,加深对复数的运算及几何意义的理解;

3)“复数的概念与表示,复数的运算及意义”的整体性任务:请帮助没有来上课的同学补习,制作一份包括重点、难点、思想方法、难点解析、例题讲解和练习题等内容的教案。

多方面的评价方式可以更全面地考查学生对复数概念和运算规律的掌握情况,从而更准确地评估学生的学习成果。

#### 其他证据 课堂观察与问答、纸笔考查。

#### 学生自我评估与反馈 自我评价习题册。

#### 阶段4 规划教学过程。

在阶段4中,根据阶段2设计的基本问题以及阶段3中的表现性任务编排“复数”单元的关键学习活动,并以WHERE TO原则中的相应字母进行编码(为了区分,下文用“E”表示“探索与始能”,

用“E2”表示“评价”),具体如表1和表2所示.借助这一框架设计活动,帮助学生更好地理解复数概念和运算规律,从而提高数学思维和解决实际问题

表1 “复数”逆向单元设计的阶段4教学设计1

“复数的概念与表示”活动设计	活动编号
利用三次方程求解数学史引发学生认知冲突,突出数系扩充势在必行的现状	H
回顾实数系的扩充过程,引导学生总结构成数的基本要素,并向学生展示基本问题	W
从计数单位发展的角度总结数系发展历史、整理扩充“规则”	E
从计数单位的角度对负数开平方转化为最基本的对开平方的问题,以帮助学生认识虚数单位	E,H
辨析复数与实数的联系,深入理解复数的概念与代数形式	E
类比实数与数轴上的点一一对应,探讨复数的几何形式与三角形式	E
小组内部合作交流对“数”的认识与本节课的收获,并请小组成员上台展示讨论结果	O
讨论问题:实数集与复数集有什么关系?学习复数的基本思路是什么?	R

表2 “复数”逆向单元设计的阶段4教学设计2

“复数的运算及意义”活动设计	活动编号
复习复数的概念与表示,类比实数归纳对此类研究对象的一般路径	W
类比向量运算和多项式运算,探究复数3种表现形式的四则运算法则	E
类比实数,联系复数的几何表示与三角表示,探究复数四则运算的几何意义	E,T
设计“寻找复数宝藏”游戏,让学生通过寻找隐藏在复平面上的复数	O
设计学案帮助没有来上课的同学学习复数的概念与复数的四则运算等内容,并归纳复数学习的数学思想与方法	E,T
学生对整体的学习进行反思与评价	E2,R

大概念统摄下的逆向教学设计与当前“教学评”一致性的要求相契合,为素养导向的课堂变革提供了新的途径.本文以复数为例,旨在促进学生对复数的深度理解,不仅丰富了复数教学案例,也为大概念统摄下的逆向教学设计提供了框架和思路.未来,我们需要更多的教学案例开发和实践探索,以进一步推进大概念视角下的逆向单元教学设计研究.

### 参 考 文 献

- 研(数学),2019(3):1-4.
- [4] 张小明,汪晓勤.复数概念的 HPM 教学案例[J].中学数学教学参考(下旬),2007(6):4-7.
- [5] 夏静,高明.新旧人教 A 版“复数”比较分析[J].数学学习与研究,2020(18):116-117.
- [6] 李龙才.体现数系扩充过程,加强数与形的融合,提升数学核心素养:人教 A 版普通高中教科书《数学》(必修第二册)第七章“复数”的教材设计与教学思考[J].中学数学教学参考(下旬),2020(5):20-23.
- [7] 卜梦丹,唐恒钧.数学大概念的内涵、提取途径及其理解维度[J].中小学教师培训,2022(7):36-39.
- [8] 巩子坤,史宁中,张丹.义务教育数学课程标准修订的新视角:数的概念与运算的一致性[J].课程·教材·教法,2022,42(6):45-51;56.
- [1] 邵朝友,韩文杰,张雨强.试论以大观念为中心的单元设计:基于两种单元设计思路的考察[J].全球教育展望,2019,48(6):74-83.
- [2] 威金斯,麦克泰格.追求理解的教学设计[M].2版.闫寒冰,宋雪莲,赖平,译.上海:华东师范大学出版社,2017:13-21.
- [3] 吴英,徐元根,唐恒钧.基于数学本质的“数系的扩充和复数的概念”教学探索[J].中学教