数学高考一轮复习专题之十五

“复数”复习专题

黄石七中　袁季春

复数是高中理科数学高考必考内容，在高考中大多是容易题，以选择题或填空题的形式考查复数的有关概念，复数相等. 复数的代数运算以及复数的几何意义.

考点一　复数的有关概念以及复数的几何意义

1. 复数的分类 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$

$$\begin{cases}\text{实数}(b=0)\\ \text{虚数}(b\neq0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\ \text{非纯虚数}(a\neq0)\end{cases}\end{cases}$$

2. 处理相关复数概念的问题，首先要找准复数的实部与虚部，然后根据定义解题.

例1 复数 $z=\lg(m^2-2m-2)+(m^2+3m+2)\mathrm{i}$，当实数 m 为何值时？

(1) z 为纯虚数；

(2) z 为实数；

(3) z 对应的点在复平面内的第二象限内.

解　(1)若 z 为纯虚数，则 $\begin{cases}\lg(m^2-2m-2)=0,\\ m^2+3m+2\neq0.\end{cases}$

解得 $m=3$，$\therefore$ 当 $m=3$ 时 z 为纯虚数.

(2)若 z 为实数，则 $\begin{cases}m^2-2m-2>0,\\ m^2+3m+2=0.\end{cases}$ 解得 $m=-1$ 或 $m=-2$，$\therefore$ 当 $m=-1$ 或 $m=-2$ 时 $z\in\mathbf{R}$.

(3)若 z 对应的点在第二象限，则

$$\begin{cases}\lg(m^2-2m-2)<0,\\ m^2-2m-2>0,\\ m^2+3m+2>0.\end{cases}$$

解得 $-1<m<1-\sqrt{3}$ 或 $1+\sqrt{3}<m<3$,

$\therefore$ 当 $-1<m<1-\sqrt{3}$ 或 $1+\sqrt{3}<m<3$ 时，z 对应点在第二象限.

点拨　复数分类的充要性是解此类题的关键，复数与平面上的点是一一对应的，这为形与数之间的相互转化提供了一条重要思路，要完整理解复数为纯虚数的等价条件，切不可忘记复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数的一个必要条件是 $b\neq0$，计算中实部、虚部有意义也不可忽视.

考点二　复数相等

1. 两个复数相等的充要条件是两个复数的实部. 虚部分别对应相等.

2. 解复数相等问题时，常利用复数相等的条件，构造方程组来解决.

例 2　设集合 $M=\{(a+3)+(b^2-1)\mathrm{i},8\}$，集合 $N=\{3\mathrm{i},(a^2-1)+(b+2)\mathrm{i}\}$，同时满足 $M\cap N\subsetneqq M$，$M\cap N\neq\varnothing$，求 $a+b$ 的值.

解 依题设有：$(a+3)+(b^2-1)\mathrm{i}=3\mathrm{i}$ ①

或 $8=(a^2-1)+(b+2)\mathrm{i}$ ②

由①得 $a=-3,b=\pm2$；

由②得 $a=\pm3,b=-2$.

经检验 $a=-3,b=-2$ 不合题意，舍去.

$\therefore a=-3,b=2$ 或 $a=3,b=-2$，

$\therefore a+b=-1$ 或 $a+b=1$.

点拨 1. 此题中复数之间的等量关系并未直接给出,而是通过集合之间的关系间接给出,应注意知识之间相互联系及思维的广阔性和严谨性.

2. 利用复数相等实现了复数问题向实数问题的转化,体现了转化化归思想.

考点三 复数的代数运算

1. 复数的四则运算类似于多项式的四则运算,此时含有虚数单位 i 的看作一类同类项,不含 i 的看作另一类同类项,分别合并即可,但要注意把 i 的幂写成最简单的形式,在运算过程中,要熟悉 i 的特点及熟练应用运算技巧.

2. 在进行复数的代数运算时,记住以下结论,可提高计算速度.

① $(1\pm \mathrm{i})^2=\pm 2\mathrm{i}$; ② $\dfrac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\mathrm{i}$, $\dfrac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}$;

③ $-b+a\mathrm{i}=\mathrm{i}(a+b\mathrm{i})$.

例3 计算:(1) $\dfrac{(-1+\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{\mathrm{i}^3}$;

(2) $\dfrac{(1+2\mathrm{i})^2+3(1-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}$;

(3) $\dfrac{1-\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}+\dfrac{1+\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^2}$;

(4) $\dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}$.

解 (1)原式 $=\dfrac{-3+\mathrm{i}}{-\mathrm{i}}=-1-3\mathrm{i}$;

(2)原式 $=\dfrac{-3+4\mathrm{i}+3-3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}+2}=\dfrac{\mathrm{i}(2-\mathrm{i})}{5}$

$=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}\mathrm{i}$;

(3)原式 $=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}+\dfrac{1+\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}=\dfrac{-2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=-1$;

(4)原式 $=\dfrac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}=\dfrac{-\mathrm{i}}{\sqrt{3}+\mathrm{i}}=\dfrac{(-\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})}{4}$

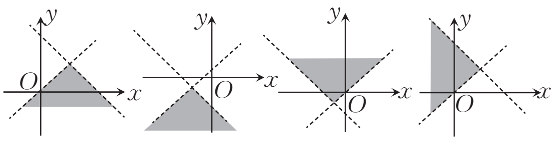
$=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$.

点拨 本题是复数四则混合运算,复数乘法类似于两个多项式相乘,复数除法与作根式除法时的处理很类似,分子、分母都乘分母的"实数化因式"(共轭复数),从而使分母"实数化".

考点四 复数的综合应用

复数容易与三角、不等式等知识建立内在联系,复数综合应用问题通常的求解思路是化归为实数问题,即"化虚为实".

例4 设 x、y 均为实数,i 是虚数单位,复数 $\dfrac{x-y\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}+\mathrm{i}$ 对应的点在第四象限,则复数 $z=x+y\mathrm{i}$ 在复平面上的点集用阴影表示为下图中的( )



A B C D

解 $\because \dfrac{x-y\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}+\mathrm{i}=\dfrac{x-2y}{5}+\dfrac{-2x-y+5}{5}\mathrm{i}$,

$\therefore$ 依题设有 $\begin{cases}\dfrac{x-2y}{5}>0,\\ \dfrac{-2x-y+5}{5}>0,\end{cases}$

$\therefore \begin{cases}x-2y>0,\\ 2x+y-5<0.\end{cases}$ 画出不等式组表示的平面区域即可知应选 A.

点拨 此题是以复数知识为载体,借助复数运算和几何意义引出不等式组,进一步考查了线性规划知识.

例5 设集合 $M=\{y\,|\,y=|\cos^2x-\sin^2x|, x\in\mathbf{R}\}$ $N=\{x\,|\,|x-\dfrac{1}{\mathrm{i}}|<\sqrt{2}$, i为虚数单位, $x\in\mathbf{R}\}$, 则$M\cap N$为( )

A. $(0,1)$ B. $(0,1]$ C. $[0,1)$ D. $[0,1]$

解 对于集合 M,函数 $y=|\cos^2x-\sin^2x|=|\cos 2x|$,

$\therefore M=[0,1]$.

对于集合 N,根据复数模的计算方法得不等式 $\sqrt{x^2+1}<\sqrt{2}$,

$\therefore x^2<1$, $\therefore -1<x<1$, $\therefore N=(-1,1)$.

$\therefore M\cap N=[0,1)$, $\therefore$ 选 C.

点拨 本题借助三角函数的图形与性质以及复数的知识考查集合的运算,本题设置借助方程中的代表元 y 实现了求函数的值域,借助复数的模构造了解不等式问题.

【专题训练十五】

1. 在复平面内,复数 $z=\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})$ 对应的点位于( )

A. 第一象限 B. 第二象限

C. 第三象限　　　D. 第四象限

2. i是虚数单位，若 $\frac{1+7i}{2-i}=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则乘积 ab 的值是(　　)

A. −15　　B. −3　　C. 3　　D. 15

3. 已知 $\frac{\bar{z}}{1+i}=2+i$，则复数 $z=$ ________.

4. 设 $z=1+i$（i为虚数单位），则 $\frac{2}{z}+z^2=$ ____.

5. 已知复数 $z=\frac{\sqrt{3}+i}{(1-\sqrt{3}i)^2}$，$\bar{z}$ 是 z 的共轭复数，则 $z\cdot\bar{z}=$(　　)

A. $\frac{1}{4}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

6. 在复平面内，复数 $\frac{2i}{1-i}$ 对应的点的坐标为___.

7. i 为虚数单位，$\frac{i}{\sqrt{3}+\sqrt{3}i}=$________.

8. 设复数 z 满足 $z(2-3i)=6+4i$（i 为虚数单位），则 z 的模为________.

9. 若复数 $z=1-2i$（i为虚数单位），则 $z\cdot\bar{z}+z=$________.

10. 对于复数 a、b、c、d，若集合 $s'=\{a,b,c,d\}$，若具有性质“对任意 x、$y\in s'$，必有 $xy\in s'$”，则当 $\begin{cases}a=1,\\b^2=1,\\c^2=b,\end{cases}$ 时，$b+c+d=$(　　)

A. 1　　B. −1　　C. 0　　D. i

11. 复数 $\frac{2+i}{1-2i}$ 的共轭复数是(　　)

A. $-\frac{3}{5}i$　　B. $\frac{3}{5}i$　　C. $-i$　　D. i

12. 若 $z=\frac{1+2i}{i}$，则复数 $\bar{z}=$(　　)

A. $-2-i$　　B. $-2+i$　　C. $2-i$　　D. $2+i$

13. 把复数 z 的共轭复数记作 $\bar{z}$，i为虚数单位. 若 $z=1+i$，则 $(1+z)\ \bar{z}=$(　　)

A. $3-i$　　B. $3+i$　　C. $1+3i$　　D. 3

14. 若 a、$b\in\mathbf{R}$，i为虚数单位，且 $(a+i)i=b+i$，则(　　)

A. $a=1,b=1$　　B. $a=-1,b=1$

C. $a=-1,b=-1$　　D. $a=1,b=-1$

15. 复数 $z=\frac{2-i}{2+i}$（i为虚数单位）在复平面内对应的点所在象限为(　　)

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

16. 设i是虚数单位，复数 $\frac{1+ai}{2-i}$ 为纯虚数，则实数 $a=$______

17. 设复数 z 满足 $(1+i)z=2$，其中i为虚数单位，则 $z=$______

18. i 是虚数单位，复数 $\frac{1-3i}{1-i}=$________

19. 设复数 z 满足 $i(1+z)=-3+2i$（i为虚数单位），则 z 的实部是________

20. a 为正实数，i为虚数单位，$\left|\frac{a+i}{i}\right|=2$，则 $a=$______

21. 已知 $m\in\mathbf{R}$，复数 $z=\frac{m(m-2)}{m-1}+(m^2+2m-3)i$，当 m 为何值时？

(1) $z\in\mathbf{R}$；

(2) z 是纯虚数；

(3) z 对应的点位于复平面第二象限；

(4) z 对应的点在直线 $x+y+3=0$ 上.

22. 设存在复数 z 同时满足下列条件：

(1)复数 z 在复平面内对应的点位于第二象限；

(2) $z\cdot\bar{z}+2iz=8+ai(a\in\mathbf{R})$.

试求 a 的取值范围.

【参考答案】

1. B　2. B　3. $1-3i$　4. $1+i$　5. A

6. (−1,1)　7. $\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{12}i$　8. 2　9. $6-2i$

10. B　11. D　12. D　13. A　14. D　15. D

16. 2　17. $1-i$　18. $2-i$　19. 1　20. $\sqrt{3}$

21. (1) $m=-3$　(2) $m=0$ 或 $m=2$

(3) $m<-3$ 或 $1<m<2$

(4) $m=0$ 或 $m=-1\pm\sqrt{5}$　22. [−6,0)