

聚焦全概率公式及其应用

■江苏省无锡市第六高级中学

陈 敏

■江苏省无锡市青山高级中学

张启兆

全概率公式已经纳入了《普通高中数学课程标准》(2017 年版、2020 年修订)中,全概率公式是人教社 2017 年 A 版高中数学选择性必修第三册的内容,2019 年全国 I 卷理科第 22 题间接考查了全概率公式,同学们要重视对这个新增内容的理解与应用。

1. 正确理解全概率公式

(1)全概率公式。

在全概率的实际问题中我们经常会碰到一些较为复杂的概率计算,这时,我们可以用“化整为零”的思想将它们分解为一些较为容易的情况分别进行考虑。

一般地,设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, 且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则对任意的事件 $B \subseteq \Omega$, 有 $P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B | A_i)$ 。

我们称上面的公式为全概率公式,全概率公式是概率论中最基本的公式之一。

(2)贝叶斯公式。

设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是一组两两互斥的事件, $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$, 且 $P(A_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则对任意事件 $B \subseteq \Omega, P(B) > 0$,

$$P(A_i | B) = \frac{P(A_i)P(B | A_i)}{P(B)}$$

$$\frac{P(A_i)P(B | A_i)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P(B | A_k)}, i = 1, 2, \dots, n.$$

在贝叶斯公式中, $P(A_i)$ 和 $P(A_i | B)$ 分别称为先验概率和后验概率。

2. 准确应用全概率公式

例 1

盒中有 a 个红球, b 个黑球, 现在随机地从中取出一个, 观察其颜色后放回, 并加上 c 个同色球, 再从盒中抽取 1 个球, 则第二次抽出的是红球的概率是()。

A. $\frac{a}{a+b+c}$

B. $\frac{a}{a+b}$

C. $\frac{a}{a+c}$

D. $\frac{a+c}{a+b+c}$

分析: 设“第一次抽出的是红球”为事件 A , “第二次抽出的是红球”为事件 B , 则 $B = A \cdot B + \bar{A} \cdot B$, 再利用全概率公式求解。

解: 设“第一次抽出的是红球”为事件 A , “第二次抽出的是红球”为事件 B , 则 $B = A \cdot B + \bar{A} \cdot B$ 。

$$\text{由全概率公式得 } P(B) = P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A}).$$

$$\text{由题意得 } P(A) = \frac{a}{a+b}, P(B|A) = \frac{a+c}{a+b+c}, P(\bar{A}) = \frac{b}{a+b}, P(B|\bar{A}) = \frac{a}{a+b+c}.$$

$$\text{所以 } P(B) = \frac{a(a+c)}{(a+b)(a+b+c)} + \frac{ab}{(a+b)(a+b+c)} = \frac{a}{a+b}. \text{ 选 B.}$$

评注: 全概率公式的使用要点: (1) 如果所考虑问题的试验分两步, 第一步试验结果可确定为样本空间的一个划分, 求与第二步试验结果有关的事件的概率, 此时可用全概率公式解决; (2) 用全概率公式解题的关键是确定样本空间的一个划分, 这可以从第一步试验的结果确定。

例 2

(多选题) 已知编号为 1, 2, 3 的三个盒子, 其中 1 号盒子内装有两个 1 号球, 一个 2 号球和一个 3 号球; 2 号盒子内装有两个 1 号球, 一个 3 号球; 3 号盒子内装有三个 1 号球, 两个 2 号球。若第一次先从 1 号盒子内随机抽取一个球, 将取出的球放入与球同编号的盒子中, 第二次从该盒子中任取一个球, 则下列说法正确的是()。

A. 在第一次抽到 2 号球的条件下, 第二次抽到 1 号球的概率为 $\frac{1}{2}$

B. 第二次抽到 3 号球的概率为 $\frac{11}{48}$

C. 如果第二次抽到的是 1 号球,那么它来自 2 号盒子的概率最大

D. 如果将 5 个不同的小球放入这三个盒子内,每个盒子至少放 1 个,那么不同的放法有 300 种

分析:计算条件概率判断 A;利用全概率公式计算判断 B;利用贝叶斯公式求解判断 C;求出不同元素的分组分配种数判断 D。

解:记第一次抽到第 i 号球的事件分别为 $A_i (i=1,2,3)$,则有 $P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4}$ 。

对于 A,在第一次抽到 2 号球的条件下,把 2 号球放入 2 号盒子内,因此第二次抽到 1 号球的概率为 $P = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$,A 正确。

对于 B,记第二次在第 i 号盒内抽到 3 号球的事件分别为 $B_i (i=1,2,3)$,而 A_1, A_2, A_3 两两互斥,和为 Ω , $P(B_1 | A_1) = \frac{1}{4}$, $P(B_2 | A_2) = \frac{1}{4}, P(B_3 | A_3) = \frac{1}{6}$ 。

记第二次抽到 3 号球的事件为 $B, P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i B_i) = \sum_{i=1}^3 [P(A_i) \cdot P(B_i | A_i)] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{48}$,B 正确。

对于 C,记第二次在第 i 号盒内抽到 1 号球的事件分别为 $C_i (i=1,2,3)$,而 A_1, A_2, A_3 两两互斥,和为 Ω , $P(C_1 | A_1) = \frac{1}{2}$, $P(C_2 | A_2) = \frac{1}{2}, P(C_3 | A_3) = \frac{1}{2}$ 。

记第二次抽到 1 号球的事件为 $C, P(C) = \sum_{i=1}^3 P(A_i C_i) = \sum_{i=1}^3 [P(A_i) \cdot P(C_i | A_i)] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 。

第二次的球取自盒子的编号与第一次取的球的号数相同。

$$P(A_1 | C) = \frac{P(A_1) \cdot P(C_1 | A_1)}{P(C)} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}。$$

$$P(A_2 | C) = \frac{P(A_2) \cdot P(C_2 | A_2)}{P(C)} = \frac{1}{4}。$$

$$P(A_3 | C) = \frac{P(A_3) \cdot P(C_3 | A_3)}{P(C)} =$$

$$\frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}。若第二次抽到的是 1 号球,则$$

它来自 1 号盒子的概率最大,C 不正确。

对于 D,把 5 个不同的小球分成 3 组的不同分组方法数是 $(C_5^3 + \frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2})$,将每一种分组方法分成的小球放在 3 个盒子中,有 A_3^3 种不同放法。

由分步乘法计数原理得,不同的放法种数是 $(C_5^3 + \frac{C_5^2 C_3^2}{A_2^2}) \cdot A_3^3 = 150$,D 不正确。

故选 AB。

评注:全概率公式和贝叶斯公式使用时有区别,若随机试验可以分两个阶段进行,且第一阶段的各试验结果具体怎样未知,那么(1)如果要求的是第二阶段某一个结果发生的概率,则用全概率公式;(2)如果第二个阶段的某一个结果是已知的,要求的是此结果为第一阶段某一个结果所引起的概率,一般用贝叶斯公式。

例 3 由于身体及心理方面的差异,人们往往认为女性驾驶员比男性驾驶员更容易发生交通事故。为调查女性驾驶员是否比男性驾驶员更容易发生交通事故,同学们组成了调查小组,对其所在城市进行了调查研究。结果却显示为:该市 2022 年男女驾驶员的比例为 7:3,男性驾驶员平均万人的发案数为 2.20,女性驾驶员平均万人的发案数为 0.25。(发案即发生了交通事故,暂不区分其是否为肇事责任人。)

(1)若在全市驾驶员中随机抽取 3 人,则恰有 1 位女驾驶员的概率是多少?

(2)若该市一名驾驶员在 2022 年发生了交通事故,则其为女性的概率是多少?(结果

保留到小数点后第三位)

分析:(1)设在全市驾驶员中随机抽取 3 人,女驾驶员的人数为 X ,则 $X \sim B(3, 0.3)$,再根据二项分布的概率公式求解即可。(2)设事件 A 为“驾驶员为女性”,事件 B 为“驾驶员发生的交通事故”,进而结合全概率公式和条件概率公式求解即可。

解:(1)因为该市 2022 年男女驾驶员的比例为 7:3,所以在全市驾驶员中随机抽取 1 人是女驾驶员的概率为 0.3。

设在全市驾驶员中随机抽取 3 人,女驾驶员的人数为 X ,所以 $X \sim B(3, 0.3)$ 。

恰有 1 位女驾驶员的概率是 $P(X=1) = C_3^1 \times 0.3 \times 0.7^2 = 0.441$ 。

(2)设事件 A 为“驾驶员为女性”,事件 B 为“驾驶员发生的交通事故”。

所以 $P(A) = 0.3, P(\bar{A}) = 0.7, P(B|A) = 0.25 \times 10^{-4}, P(B|\bar{A}) = 2.20 \times 10^{-4}$ 。

根据全概率公式, $P(B) = P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A}) = 0.075 \times 10^{-4} + 2.2 \times 0.7 \times 10^{-4} = 1.615 \times 10^{-4}$ 。

$$\begin{aligned} \text{因此, } P(A|B) &= \frac{P(AB)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\bar{A})P(B|\bar{A})} \\ &= \frac{0.075 \times 10^{-4}}{1.615 \times 10^{-4}} \approx 0.046. \end{aligned}$$

故该市一名驾驶员在 2022 年发生了交通事故,则其为女性的概率是 0.046。

评注:在运用全概率公式时,已知、未知条件为:(1)划分后的每个小事件的概率,即 $P(B_i), i=1, 2, \dots, n$;(2)每个小事件发生的条件下, A 发生的概率,即 $P(A|B_i), i=1, 2, \dots, n$;(3)求解目标是计算事件 A 发生的概率,即 $P(A)$ 。

例 4 有甲、乙、丙三个厂家生产同种规格的产品,甲、乙、丙三个厂家生产的产品的合格率分别为 0.95、0.90、0.80,已知甲、乙、丙三个厂家生产的产品数所占比例为 2:3:5,将三个厂家生产的产品混放在一起,现从混合产品中任取 1 件。

(1)求这件产品为合格品的概率;

(2)已知取到的产品是合格品,问它是哪个厂家生产的可能性最大。

分析:(1)设事件 A 表示取到的产品为合格品, B_1, B_2, B_3 分别表示产品由甲、乙、丙厂生产,由题意可得出 $P(B_i) (i=1, 2, 3)$ 以及 $P(A|B_i) (i=1, 2, 3)$ 的值,再利用全概率公式可求得所求事件的概率;(2)计算出 $P(B_1|A), P(B_2|A), P(B_3|A)$ 的值,比较大小后可得出结论。

解:(1)设事件 A 表示取到的产品为合格品, B_1, B_2, B_3 分别表示产品由甲、乙、丙厂生产。

已知 $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup B_3$, 且 B_1, B_2, B_3 两两互斥, 则 $P(B_1) = 0.2, P(B_2) = 0.3, P(B_3) = 0.5, P(A|B_1) = 0.95, P(A|B_2) = 0.9, P(A|B_3) = 0.8$ 。

由全概率公式得 $P(A) = \sum_{i=1}^3 P(B_i) \cdot P(A|B_i) = 0.2 \times 0.95 + 0.3 \times 0.9 + 0.5 \times 0.8 = 0.86$ 。

(2)由贝叶斯公式得 $P(B_1|A) = \frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)} = \frac{0.2 \times 0.95}{0.86} = \frac{19}{86}$ 。

$P(B_2|A) = \frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)} = \frac{0.3 \times 0.9}{0.86} = \frac{27}{86}$ 。

$P(B_3|A) = \frac{P(B_3)P(A|B_3)}{P(A)} = \frac{0.5 \times 0.8}{0.86} = \frac{40}{86} = \frac{20}{43}$ 。

所以, $P(B_3|A) > P(B_2|A) > P(B_1|A)$, 这件产品由丙厂生产的可能性最大。

评注:在运用贝叶斯公式时,一般已知、未知条件为:(1)事件 B 的多种情况中到底哪种情况发生了是未知的,但是每种情况发生的概率已知,即 $P(B_j), j=1, 2, \dots, n$;(2)事件 A 是已经发生的确定事实,且已知每种事件 B 发生条件下事件 A 发生的概率,即 $P(A|B_j), j=1, 2, \dots, n$;(3) $P(A)$ 未知,需要使用全概率公式计算得到。

(下转第 29 页)

故 B 正确。对于 C, $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$, 故 C 正确。对于 D, $n(\bar{A}) = 2 \times 4 = 8$, $n(\bar{A}B) = 2 \times 3 = 6$, $P(B|\bar{A}) = \frac{n(\bar{A}B)}{n(\bar{A})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, 故 D 错误。故选 ABC。

点评:本例的事件为古典概型,利用基本事件数来解决相应的条件概率问题,方法巧妙。

三、缩减样本空间法

在事件 A 发生的前提之下,进而确定事件 B 的缩减样本空间 $\Omega_A = \Omega \cap A$,并在 Ω_A 中计算事件 B 发生的概率,从而得到条件概率 $P(B|A)$ 。这是条件概率与实际操作过程中产生的有效的等价转化方式。

例 3 在 100 件产品中有 95 件合格品,5 件不合格品,现从中不放回地取两次,每次任取一件,则在第一次取到不合格品后,第二次取到不合格品的概率为_____。

解析:第一次取到不合格品后,也就是在第二次取之前,还有 99 件产品,其中有 4 件不合格品。

因此,第二次取到不合格品的概率为 $\frac{4}{99}$ 。

点评:利用缩减样本空间法求条件概率的步骤:(1)缩——将原来的基本事件全体 Ω 缩减为事件 A,原来的事件 B 缩减为 AB;(2)数——数出事件 A 中所包含的基本事件 AB;(3)算——利用 $P(B|A) = \frac{n(AB)}{n(A)}$ 求得结果。

(上接第 27 页)

练一练:

“青团”是江南人家在清明节吃的一道传统点心,据考证“青团”之称大约始于唐代,已有 1 000 多年的历史。现有甲、乙两个箱子装有大小外观均相同的“青团”,已知甲箱中有 4 个蛋黄馅的“青团”和 3 个肉松馅的“青团”,乙箱中有 3 个蛋黄馅的“青团”和 2 个肉松馅的“青团”。

四、性质法

由条件概率和对立事件的定义,可得条件概率的性质: $P(\bar{B}|A) = 1 - P(B|A)$,利用该性质可以解决一些相关的条件概率问题。这是针对一些复杂的条件概率的求解而采用的逆向思维所产生的特殊模型。

例 4 如图 1,三行三列的方阵有 9 个数 $a_{ij} (i=1,2,3, j=1,2,3)$,从中任取 3 个数,则在取到 a_{22} 的条件下,至少有 2 个数位于同行或同列的概率为_____。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

图 1

解析:设事件 A = “任取的 3 个数中有 a_{22} ”,事件 B = “3 个数中至少有 2 个数位于同行或同列”,则 $\bar{B}$ = “3 个数互不同行且不同列”。依题意得, $n(A) = C_8^2 = 28$, $n(\bar{A}B) = 2$,所以 $P(\bar{B}|A) = \frac{n(\bar{A}B)}{n(A)} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$,

$P(B|A) = 1 - P(\bar{B}|A) = 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14}$ 。故在取到 a_{22} 的条件下,至少有 2 个数位于同行或同列的概率为 $\frac{13}{14}$ 。

点评:解决本题时,直接求解可能会没有头绪,由于“在取到 a_{22} 的条件下,至少有 2 个数位于同行或同列”无法直接来解决,而通过条件概率的性质法,从对立面去分析,即利用对立事件的概率来转化,巧妙有效。

(责任编辑 徐利杰)

(1)若从甲箱中任取 2 个“青团”,求这 2 个“青团”馅不同的概率;

(2)若先从甲箱中任取 2 个“青团”放入乙箱中,然后再从乙箱中任取 1 个“青团”,求取出的这个“青团”是肉松馅的概率。

参考答案:(1) $\frac{4}{7}$ 。(2) $\frac{20}{49}$ 。

(责任编辑 徐利杰)