对 2023 年高考新课标 I 卷第 21 题的探究溯源及拓展变式

江苏省南京市板桥中学 (210039) 纪明亮

摘要 本文从不同角度对 2023 年高考新课标 I 卷第 21 题进行了解法探究, 并在此基础上对该问题进行溯源, 探究发现其背后的数学原理, 最后再进一步的拓展, 使知识得到升华.

关键词 条件概率; 全概率公式; 递推关系; 等比数列

2023 年高考新课标 I 卷第 21 题是一道概率统计题, 主要考查条件概率和全概率公式及由递推关系构造等比数列. 这些都是高中数学内的重要知识点. 全概率公式是在文 [1] 中有系统介绍.

引理[1] 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥, 且它们的和 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$, $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则对 Ω 中任意事件 B, 有 $P(B) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$. 这个公式称为全概率公式.

一、试题呈现

题目 1 (2023 年高考新课标 I 卷第 21 题) 甲、乙两人投篮, 每次由其中一人投篮, 规则如下: 若命中则此人继续投篮, 若未命中则换为对方投篮. 无论之前投篮情况如何, 甲每次投篮命中率均为 0.6, 乙每次命中率均为 0.8. 由抽签确定第 1 次投篮的人选, 第 1 次投篮人是甲、乙的概率各为 0.5.

(1) 求第 2 次投篮的人是乙的概率;

(2) 求第 i 次投篮的人是甲的概率;

(3) 已知: 若随机变量 X_i 服从两点分布, 且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = q_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 则 $E(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} q_i$. 记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次数为 Y, 求 $E(Y)$.

分析 (1) 第 1 次投篮的人是甲或乙, 可由全概率公式得到第 2 次投篮的人是乙的概率.

(2) 每次投篮人是甲与是乙是对立事件. 从第 2 次开始投篮人是甲是由前一次投篮人是谁且是否投进决定的. 设 i 次投篮的人是甲的概率为 p_i, 根据全概率公式建立 p_{i+1} 与 p_i 的递推关系, 再由该关系构造等比数列得到 p_i 关系式.

(3) 因为甲每次投篮次数是 0 或 1 服从两点分布, 所以根据题中提供的两点分布的期望公式只需求得的第 i 次投篮的人是甲的概率 p_i, 即可算出 n 次投篮甲投篮次数的期望.

二、试题解答

解 (1) 记"第 i 次投篮的人是甲"为事件 A_i, "第 i 次投篮的人是乙"为事件 B_i, 根据全概率公式得 $P(B_2) = P(A_1)P(B_2|A_1) + P(B_1)P(B_2|B_1) = 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.8 = 0.6$.

(2) 设 $P(A_i) = p_i$, 则 $P(B_i) = 1 - p_i$, 则根据全概率公式得 $P(A_{i+1}) = P(A_i)P(A_{i+1}|A_i) + P(B_i)P(A_{i+1}|B_i)$, 即 $p_{i+1} = 0.6p_i + (1 - 0.8)(1 - p_i) = 0.4p_i + 0.2$. 构造等比数列 $\{p_i + \lambda\}$, 设 $p_{i+1} + \lambda = \frac{2}{5}(p_i + \lambda)$, 则 $\frac{2}{5}p_i + \frac{1}{5} + \lambda = \frac{2}{5}(p_i + \lambda)$, 解得 $\lambda = -\frac{1}{3}$, 则 $p_{i+1} - \frac{1}{3} = \frac{2}{5}(p_i - \frac{1}{3})$. 因为 $p_1 = \frac{1}{2}$, 所以 $p_1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, 则 $\{p_i - \frac{1}{3}\}$ 是首项是 $\frac{1}{6}$, 公比是 $\frac{2}{5}$ 的等比数列, 则 $p_i - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \times (\frac{2}{5})^{i-1}$, $p_i = \frac{1}{6} \times (\frac{2}{5})^{i-1} + \frac{1}{3}$.

(3) 因为甲每次投篮数的随机变量 Y_i 服从两点分布, 且 $P(Y_i = 1) = p_i = \frac{1}{6} \times (\frac{2}{5})^{i-1} + \frac{1}{3}$, $n = 1, 2, \cdots$, 所以

$$E(Y) = E(\sum_{i=1}^{n} Y_i) = \sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{5}{18}[1 - (\frac{2}{5})^n] + \frac{n}{3}.$$

评注 每次投篮的人是甲或乙是对立事件, 即事件 A_i, B_i 互为对立事件, 则 $P(B_i) = P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i)$. 第 $i+1$ 次投篮人是甲概率 $P(A_{i+1}) = p_{i+1}$ 仅由第 i 次投篮人是甲概率 $P(A_i) = p_i$ 确定, 即满足条件概率 $P(A_{i+1}|A_1, A_2, \cdots, A_i) = P(A_{i+1}|A_i)$.

三、试题溯源

这道高考题的问题背景是马尔科夫链[2], 马尔科夫链是概率统计中的重要模型, 其数学定义: 假设我们的序列状态依次是 $X_1, X_2, \cdots, X_i, X_{i+1}, \cdots$, 那么 X_{i+1} 时刻的状态的条件概率仅依赖前一时刻 X_i 的状态, 即 $P(X_{i+1}|X_1, X_2, \cdots, X_i) = P(X_{i+1}|X_i)$.

若随机事件 A_i 符合马尔科夫链, 设 $P(A_i) = p_i$, 则根据全概率公式得: $P(A_{i+1}) = P(A_i)P(A_{i+1}|A_i) + P(\overline{A_i})P(A_{i+1}|\overline{A_i})$. 即 $P_{i+1} = P_i \cdot P(A_{i+1}|A_i) + (1 - P_i) \cdot P(A_{i+1}|\overline{A_i})$. 若 $P(A_{i+1}|A_i)$, $P(A_{i+1}|\overline{A_i})$, 均为常数, 则得到 P_{i+1} 与 P_i 的递推关系.

每次试验随机变量 X_i 服从两点分布, $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p_i$, 且 $P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = p_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 若 $X = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, 则 $E(X) = E(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} [1 \times p_i + 0 \times (1 - p_i)] = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$.

四、变式探究

题目 2 设 k 个人进行相互传球游戏, 每个拿球的人等可能地把球传给其他人中的任何一位, $k \geqslant 3$, 初始时球在甲手中, 第 n 次传球之后,

(1) 球回到甲手中的概率是多少?

(2) 记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次传球) 之后球在甲手中次数为 X, 求 $E(X)$.

解 (1) 记"第 i 次传球, 球回到甲手中"为事件 A_i. 设 $P(A_i)=p_i, i=1,2,\cdots,n$, 则由全概率公式得 $P(A_{i+1})=P(A_i)P(A_{i+1}|A_i)+P(\overline{A_i})P(A_{i+1}|\overline{A_i})$, 即 $P_{i+1}=0\cdot P_i+\frac{1}{k-1}(1-P_i)=\frac{1}{k-1}(1-P_i)$. 构造等比数列 $\{p_i+\lambda\}$, 设 $p_{i+1}+\lambda=-\frac{1}{k-1}(p_i+\lambda)$, 则 $p_{i+1}+\lambda=-\frac{1}{k-1}(p_i+\lambda)$, 解得 $\lambda=-\frac{1}{k}$, 则 $p_{i+1}-\frac{1}{k}=-\frac{1}{k-1}(p_i-\frac{1}{k})$. 因为 $p_1=1$, 所以 $p_1-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}$, 则 $\{p_i-\frac{1}{k}\}$ 是首项是 $\frac{k-1}{k}$, 公比是 $-\frac{1}{k}$ 的等比数列, 则 $p_i-\frac{1}{k}=\frac{k-1}{k}\times(-\frac{1}{k-1})^{i-1}$, $p_i=\frac{k-1}{k}\times(-\frac{1}{k-1})^{i-1}+\frac{1}{k}$. 则第 n 次传球之后, 球回到甲手中概率是 $p_n=\frac{k-1}{k}\times(-\frac{1}{k-1})^{n-1}+\frac{1}{k}$.

(2) 记前 n 次 (即从第 1 次到第 n 次投篮) 中甲投篮的次数为 X, 第 i 次球在甲手中记为 X_i, 则 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, 因为 $P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=p_i, i=1,2,\cdots,n$, 则

$$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}p_i=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{1-(-\frac{1}{k-1})^n}{1+\frac{1}{k-1}}+\frac{n}{k}$$
$$=(\frac{k-1}{k})^2-(\frac{k-1}{k})^2\cdot(-\frac{1}{k-1})^n+\frac{n}{k}.$$

评注 事件 A_i 符合马尔科夫链, 则

$$P(A_{i+1}|A_1,A_2,\cdots,A_i)=P(A_{i+1}|A_i),$$

再由全概率公式得 $P(A_{i+1})=P(A_i)P(A_{i+1}|A_i)+P(\overline{A_i})P(A_{i+1}|\overline{A_i})$, 其中 $P(A_{i+1}|A_i)=0$(传球不能传给自己), $P(A_{i+1}|\overline{A_i})=\frac{1}{k-1}$. 这样就得到 P_{i+1} 与 P_i 关系.

五、拓展延伸

马尔科夫链的推广 设我们的序列状态依次是 $X_1,X_2,\cdots,X_i,X_{i+1},\cdots$, 那么 X_{i+1} 时刻的状态的条件概率依赖前两个时刻 X_i、X_{i-1} 状态, 即

$$P(X_{i+1}|X_1,X_2,\cdots,X_i)=P(X_{i+1}|X_i)+P(X_{i+1}|X_{i-1}).$$

若随机事件 A_i 服从这一模型, 设 $P(A_i)=p_i$, 则根据全概率公式得:

$$P(A_{i+1})=P(A_i)P(A_{i+1}|A_i)+P(\overline{A_i})P(A_{i+1}|\overline{A_i})$$
$$+P(A_{i-1})P(A_{i+1}|A_{i-1})+P(\overline{A_{i-1}})P(A_{i+1}|\overline{A_{i-1}}),\quad(*)$$

若 $P(A_{i+1}|A_i)$, $P(A_{i+1}|\overline{A_i})$, $P(A_{i+1}|A_{i-1})$, $P(A_{i+1}|\overline{A_{i-1}})$ 均为常数, 则得到 P_{i+1} 与 P_i 及 P_{i-1} 递推关系.

题目 3 为激发学生体育锻炼热情, 某中学举办投篮比赛活动, 每个人定点投篮, 每次投篮相互独立. 投进一球得 2 分, 投不进也可以取得一分, 最后得分高的同学即可获胜. 学生甲投进概率为 $\frac{1}{3}$, 投不进的概率为 $\frac{2}{3}$, 设学生甲投篮得分是 $i(i\geqslant 2)$ 的概率为 p_i.

(1) 求 p_i. (2) n 次投篮后, 甲得分是 X, 求 $E(X)$.

解 (1) 记"甲投篮得分是 i"为事件 A_i, 则 $P(A_i)=p_i$, $P_1=\frac{2}{3}$, $P_2=\frac{1}{3}+(\frac{2}{3})^2=\frac{7}{9}$, $P(A_{i+1}|A_i)=\frac{2}{3}$, $P(A_{i+1}|A_{i-1})=\frac{1}{3}$, $P(A_{i+1}|\overline{A_i})=P(A_{i+1}|\overline{A_{i-1}})=0$, 由题意知 $(*)$ 式成立, 故 $p_{i+1}=\frac{2}{3}p_i+\frac{1}{3}p_{i-1}$. 构造等比数列 $\{p_{i+1}+\lambda p_i\}$, 设 $p_{i+1}+\lambda p_i=\mu(p_i+\lambda p_{i-1})$, 则 $\frac{2}{3}p_i+\frac{1}{3}p_{i-1}+\lambda p_i=\mu(p_i+\lambda p_{i-1})$, 则 $\begin{cases}\lambda+\frac{2}{3}=\mu,\\ \lambda\mu=\frac{1}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=\frac{1}{3}\\ \mu=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\lambda=-1,\\ \mu=-\frac{1}{3}.\end{cases}$ 取 $\begin{cases}\lambda=-1\\ \mu=-\frac{1}{3}\end{cases}$ 得 $p_{i+1}-p_i=-\frac{1}{3}(p_i-p_{i-1})$. 因为 $P_1=\frac{2}{3}$, $P_2=\frac{7}{9}$, 所以 $P_2-P_1=\frac{1}{9}$, 则 $\{p_{i+1}-p_i\}$ 是首项是 $\frac{1}{9}$, 公比是 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列, 则 $p_{i+1}-p_i=\frac{1}{9}\times(-\frac{1}{3})^{i-1}=(-\frac{1}{3})^{i+1}$, 则

$$\sum_{i=2}^{n}(p_i-p_{i-1})=p_i-p_1=\sum_{i=2}^{n}(-\frac{1}{3})^i=\frac{1}{12}[1-(-\frac{1}{3})^{i-1}],$$

则 $p_i=\frac{1}{12}[1-(-\frac{1}{3})^{i-1}]+\frac{2}{3}$.

(2) 设 n 次投篮投进球数为 Y, 则 $Y\sim B(n,\frac{1}{3})$, $E(Y)=\frac{n}{3}$. 因为 $X=2Y+(n-Y)=Y+n$, 所以 $E(X)=E(Y)+n=\frac{4}{3}n$, n 次投篮后甲得分的数学期望为 $\frac{4}{3}n$.

评注 $P(A_i)$ 满足条件概率 $P(A_{i+1}|A_1,A_2,\cdots,A_i)=P(A_{i+1}|A_i)+P(A_{i+1}|A_{i-1})$, 结合概率乘法公式的全概率公式得 $(*)$ 式, 从而得到 P_{i+1} 与 P_i, P_{i-1} 的递推关系, 可构造等比数列 $\{p_{i+1}+\lambda p_i\}$.

五、后记

这道高考题蕴含丰富的知识点和思想方法, 马尔科夫链、全概率公式、等比数列构造、等比数列求和、数学期望等重要知识点在这里交汇. 对高考题进行溯源, 能透过问题可以发现其背后的数学原理.

参考文献

[1] 苏教版普通高中数学教科书选择性必修第二册 [M]. 江苏: 江苏凤凰出版社, 2021.

[2] 盛骤, 谢式千, 潘承毅. 概率论与数理统计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.