二轮复习之概率与统计突破

⊙ 湖南长沙长郡中学　赵攀峰

概率与统计是高等数学的重要组成部分，是考查应用意识的主要载体，已成为每年高考命题的重点、热点. 概率与统计试题具有一定的灵活性和综合性，与现实生活密切相关，往往以实际问题为情境，与其他知识融合渗透，考查我们对知识的运用能力和创新意识. 备战2012年高考，概率统计复习要关注三个方面：①重视基本概念和基本公式；②重视离散型随机变量的分布列及其数学期望、方差的求法；③以应用题为背景，考查概率统计知识，强化运用所学知识与方法解决问题的能力.

一、排列与组合

1. 串联情况：排列、组合是概率统计的基础，两者既有联系又有区别. 排列与组合的共同点是“从n个不同元素中，任取m个不同元素”；而不同点是排列要“按照一定的顺序排成一列”，而组合是“并成一组（与顺序无关）”. 因此，“有序”与“无序”是排列与组合的重要特征.

2. 考情分析：在每年的高考中都有考查，通常以客观题出现，常与两个计数原理、概率统计交汇命题，是各地区高考命题的热点.

3. 破解技巧：解决排列组合问题时，常用的技巧：

（1）特殊元素（位置）优先安排；

（2）合理分类与准确分步.

4. 经典例题：

例1　有4位同学在同一天的上、下午参加“身高与体重”、“立定跳远”、“肺活量”、“握力”、“台阶”五个项目的测试，每位同学上、下午各测试一个项目，且不重复. 若上午不测“握力”项目，下午不测“台阶”项目，其余项目上、下午都各测试一人，则不同的安排方式共有________种（用数字作答）.

破解思路　本题可以先考虑安排上午的测试项目，再安排下午的测试项目，运用列举法解决.

经典答案　记4位同学分别为A、B、C、D，则上午共有$A_4^4=24$种安排方式. 不妨先假设上午如表1所示安排方式，

表1

项目	身高与体重	立定跳远	肺活量	握力	台阶
上午	A	B	C	╳	D
下午					╳

则下午可如下安排：$BADC$、$BCAD$、$BCDA$、$BDAC$，$CABD$、$CADB$、$CDAB$、$CDBA$，$DABC$、$DCAB$、$DCBA$，共11种安排方式. 因此，全天共有$24\times11=264$种安排方式.

例2　图1中有一个信号源和五个接收器. 接收器与信号源在同一个串联线路中时，就能接收到信号，否则就不能接收到信号. 若将图中左端的六个接线点随机地平均分成三组，将右端的六个接线点也随机地平均分成三组，再把所有六组中每组的两个接线点用导线连接，则这五个接收器能同时接收到信号的概率是（　　）

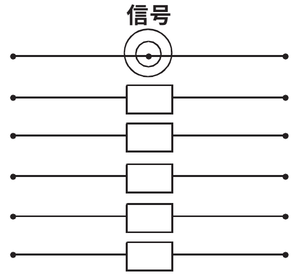

图1

A. $\frac{4}{45}$　B. $\frac{1}{36}$　C. $\frac{4}{15}$　D. $\frac{8}{15}$

破解思路　本题主要考查组合、概率知识，破解的关键是审清题意——“五个接收器能同时接收到信号”，即需五个接收器与信号源串联在同一个线路中，解题中要用到平均分组的计数求法.

经典答案　由题意，左端的六个接线点随机地平均分成三组有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$种分法，同理右端的六个接线点也随机地平均分成三组有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$种分法；要五个接收器能同时接收到信号，则需五个接收器与信号源串联在同一个线路中，即五个接收器的一个全排列，再将排列后的第一个元素与信号源左端连

接，最后一个元素与信号源右端连接，所以符合条件的连接方式共有$A_5^5=120$种，所求的概率是$P=\frac{120}{15\times15}=\frac{8}{15}$，故选D.

二、互斥事件与相互独立事件

1. 串联情况：事件的“互斥”和“相互独立”是两个不同的概念，虽然它们都是针对两个事件而言的，但互斥事件是说两个事件不能同时发生，而相互独立事件可以同时发生，并且一个事件发生与否对另一事件的发生没有影响. 互斥事件运用概率的加法公式，而相互独立事件运用概率乘法公式.

2. 考情分析：高考试题题中，常常是将互斥事件、相互独立事件等交汇在一起进行考查，主要考查我们的理解辨别能力.

3. 破解技巧：解题时，在透彻理解各类事件的基础上，准确把题中所涉及的事件进行分解，明确所求问题所包含的事件类型.

4. 经典例题：

例3 甲罐中有5个红球、2个白球和3个黑球，乙罐中有4个红球、3个白球和3个黑球. 先从甲罐中随机取出一球放入乙罐，分别以A_1，A_2和A_3表示由甲罐取出的球是红球、白球和黑球的事件；再从乙罐中随机取出一球，以B表示由乙罐取出的球是红球的事件，则下列结论中正确的是__________（写出所有正确结论的编号）.

①$P(B)=\frac{2}{5}$；②$P(B|A_1)=\frac{5}{22}$；③事件B与事件A_1相互独立；④A_1，A_2，A_3是两两互斥的事件；⑤$P(B)$的值不能确定，因为它与A_1，A_2，A_3中哪一个发生有关.

破解思路 本题从概率模型入手考查互斥事件、相互独立事件及条件概率. 解题的关键是正确理解题意，明确基本概念的内蕴，把事件B的概率进行转化$P(B)=P(B|A_1)+P(B|A_2)+P(B|A_3)$，可知事件$B$的概率是确定的.

经典答案 易见是两两互斥的事件，而$P(B)=P(B|A_1)+P(B|A_2)+P(B|A_3)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{11}+\frac{2}{10}\times\frac{4}{11}+\frac{3}{10}\times\frac{4}{11}=\frac{9}{22}$. 故选②④.

例4 在某次普通话测试中，为测试汉字发音水平，设置了10张卡片，每张卡片印有一个汉字的拼音，其中恰有3张卡片上的拼音带有后鼻音“g”.

（1）现对三位被测试者先后进行测试，第一位被测试者从这10张卡片中随机抽取1张，测试后放回，余下2位的测试也按同样的方法进行. 求这三位被测试者抽取的卡片上，拼音都带有后鼻音“g”的概率；

（2）若某位被测试者从10张卡片中一次随机抽取3张，求这三张卡片上，拼音带有后鼻音“g”的卡片不少于2张的概率.

破解思路 第1问首先确定每位测试者抽到一张带“g”卡片的概率，再利用相互独立事件的概率公式计算；第2问利用互斥事件的概率公式计算.

经典答案 （1）每次测试中，被测试者从10张卡片中随机抽取1张卡片上，拼音带有后鼻音“g”的概率为$\frac{3}{10}$，因为三位被测试者分别随机抽取一张卡片的事件是相互独立的，所以概率为$\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}=\frac{27}{1000}$.

（2）设$A_i(i=1,2,3)$表示所抽取的三张卡片中，恰有i张卡片带有后鼻音“g”的事件，且其相应的概率为$P(A_i)$，则$P(A_2)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{7}{40}$，$P(A_3)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$，因而所求概率为$P(A_2+A_3)=P(A_2)+P(A_3)=\frac{7}{40}+\frac{1}{120}=\frac{11}{60}$.

三、古典概型与几何概型

1. 串联情况：两种概型中每个基本事件出现的可能性都是相等的，但古典概型问题中所有可能出现的基本事件只有有限个，而几何概型问题中所有可能出现的基本事件有无限个.

2. 考情分析：古典概型是高考重点考查的概率模型，常与计数原理、排列组合结合起来考查；几何概型易与线性规划、定积分等几何知识交汇命题，多以选择题、填空题的形式出现.

3. 破解技巧：古典模型的概率问题，关键是正确求出基本事件总数和所求事件包含的基本事件数，要准确理解基本事件的构成；利用几何概型求概率时，关键是试验的全部结果构成的区域和事件发生的区域的寻找，有时需要设出变量，在坐标系中表示所需要的区域.

4. 经典例题：

例5 已知集合$A=\{x|-1\leqslant x\leqslant0\}$，集合$B=\{x|ax+b\cdot2^x-1<0,0\leqslant a\leqslant2,1\leqslant b\leqslant3\}$.

（1）若$a,b\in\mathbf{N}$，求$A\cap B\neq\varnothing$的概率；

（2）若$a,b\in\mathbf{R}$，求$A\cap B=\varnothing$的概率.

破解思路 本题以集合为载体，导数为工具，考查两种概率模型的求法. 对于（1）要求运用导数知识列举(a,b)，再利用古典概型求解；（2）根据条件列出不等式，再用几何概型求解.

经典答案 （1）因为$a,b\in\mathbf{N}$，(a,b)可取$(0,1)$，$(0,2)$，$(0,3)$，$(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(2,1)$，$(2,2)$，$(2,3)$共9组. 令函数$f(x)=ax+b\cdot2^x-1$，$x\in[-1,0]$，则$f'(x)=a+b\ln2\cdot2^x$. 因为$a\in[0,2]$，$b\in[1,3]$，所以$f'(x)>0$，即$f(x)$在$[-1,0]$上是单调递增函数.

$f(x)$在$[-1,0]$上的最小值为$-a+\frac{b}{2}-$

1. 要使$A\cap B\neq\varnothing$，只需$-a+\frac{b}{2}-1<0$，即$2a-b+2>0$. 所以(a,b)只能取$(0,1)$，$(1,1)$，$(1,2)$，$(1,3)$，$(2,1)$，$(2,2)$，$(2,3)$共7组. 所以$A\cap B\neq\varnothing$的概率为$\frac{7}{9}$.

(2)因为$a\in[0,2]$，$b\in[1,3]$，所以(a,b)对应的区域是边长为2的正方形（如图2），面积为4.

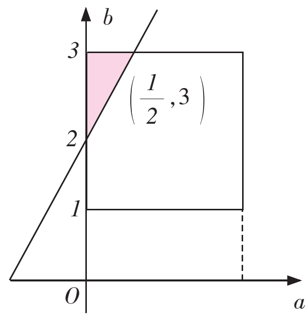

图2

由(1)可知，要使$A\cap B=\varnothing$；只需$f(x)_{\min}=-a+\frac{b}{2}-1\geqslant 0\Rightarrow 2a-b+2\leqslant 0$，所以满足$A\cap B=\varnothing$的$(a,b)$对应的区域是图中的阴影部分. 所以$S_{阴影}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，所以$A\cap B=\varnothing$的概率为$P=\frac{\frac{1}{4}}{4}=\frac{1}{16}$.

四、离散型随机变量及其分布列

1. 串联情况：离散型随机变量及其分布列是高中概率统计的核心内容，要求能写出随机变量的可能取值以及概率分布，要求熟练掌握两点分布、二项分布、超几何分布模型.

2. 考情分析：求离散型随机变量的分布列，以及分布列求随机变量的数学期望与方差，特别是二项分布，成为新课程高考内容的重点和必考对象，主要考查我们观察、分析、解决问题的能力以及我们收集、转化、处理信息的能力.

3. 破解技巧：解决此类问题时，注意以下几点：(1)离散型随机变量分布列的判断；(2)求离散型随机变量的分布列、期望与方差应用；(3)根据离散型随机变量的分布列求概率；(4)根据离散型随机变量分布列、期望与方差性质求参数.

4. 经典例题：

例6 甲、乙、丙三人参加了一家公司的招聘面试，面试合格者可正式签约，甲表示只要面试合格就签约. 乙、丙则约定：两人面试都合格就一同签约，否则两人都不签约. 设甲面试合格的概率为$\frac{1}{2}$，乙、丙面试合格的概率都是$\frac{1}{3}$，且面试是否合格互不影响.

(1)求至少有1人面试合格的概率；

(2)求签约人数ξ的分布列和数学期望.

破解思路　本题考查概率、分布列及期望的求解. 第1问运用间接法；第2问先确定ξ的取值，再运用互斥事件、相互独立事件的概率公式求出分布列，进而求得数学期望.

经典答案　(1)用A，B，C分别表示事件甲、乙、丙面试合格. 由题意知A，B，C相互独立，且$P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，至少有1人面试合格的概率是$1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{9}$.

(2)ξ的可能取值为0，1，2，3.

$P(\xi=0)=P(\overline{A}\,B\,\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}\,C)+P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)+P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$；$P(\xi=1)=P(A\overline{B}C)+P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}\,\overline{C})=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$；$P(\xi=2)=P(\overline{A}BC)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$；$P(\xi=3)=P(ABC)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$；所以$\xi$的分布列是

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$

所以ξ的期望$E\xi=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{18}+3\times\frac{1}{18}=\frac{13}{18}$.

五、概率与统计

1. 串联情况：统计是研究如何收集、整理、分析数据的学科，要求理解抽样方法，体会用样本估计总体及其特征的思想，体会统计思维与确定性思维的差异，能认识变量间的相关关系. 统计与概率的相关知识能有机地结合.

2. 考情分析：近几年高考试题中设计了许多背景与我们日常生活非常贴近的统计综合题，通过对统计图表分析出来的频率值估算事件发生的概率. 概率与统计交汇的考查，主要以课本知识为基础，以统计思想为主线，考查我们分析解决问题的能力.

3. 破解技巧：在弄清题意、读懂题目所给图表信息的基础上，建立适当的概率模型、运用有关公式进行求解，要求熟练掌握基础知识和基本方法、理解数据处理的几种基本思想、方法和作用.

4. 经典例题：

例7 为调查某市学生百米运动成绩，从该市学生中按照男、女生比例随机抽取50名学生进行百米测试，学生成绩全部都介于13秒到18秒之间，将测试结果按如下方式分成五组，第一组[13,14)，第二组[14,15)，…，第五组[17,18]，图3是按上

述分组方法得到的频率分布直方图.根据有关规定,成绩小于16秒为达标.

(1)用样本估计总体,某班有学生45人,设ξ为达标人数,求ξ的数学期望与方差;

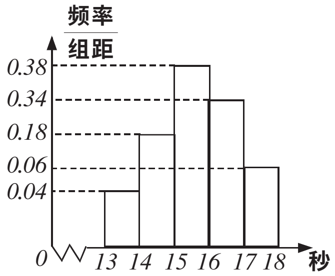

图3

(2)如果男、女生使用相同的达标标准,则男、女生达标情况如表2.

表2

性别 是否达标	男	女	合计
达标	$a=24$	$b=$____	____
不达标	$c=$____	$d=12$	____
合计	____	____	$n=50$

根据上表数据,能否有99%的把握认为"体育达标与性别有关"?若没有,你能否提出一个更好的解决方法来?

附:$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.625	10.828

破解思路 本题以频率分布直方图为载体,考查运用样本估计总体及其特征的思想.(1)把问题归结为二项分布求解;(2)运用独立性检验原理,判断两个分类变量之间的关系.

经典答案 (1)成绩在$[13,16)$的频率:$(0.04+0.18+0.38)\times 1=0.6$,若用样本估计总体,则总体达标的概率为$0.6$.从而$\xi\sim B(45,0.6)$,所以$E\xi=45\times 0.6=27$(人),$D\xi=10.8$.

(2)

性别 是否达标	男	女	合计
达标	$a=24$	$b=6$	30
不达标	$c=8$	$d=12$	20
合计	32	18	$n=50$

$K^2=\dfrac{50\times(24\times 12-6\times 8)^2}{32\times 18\times 30\times 20}\approx 8.333$,由于$K^2\approx 8.333>6.625$,故有99%的把握认为"体育达标与性别有关",故应根据男、女生性别划分达标的标准.

六、概率与其他知识

1. 串联情况:新课程高考注重在知识点的交汇处命题,这就为概率的出题提供了空间,概率可以和函数、数列、几何、算法等知识结合.

2. 考情分析:"在知识网络交汇处设计试题"是近年高考命题的重要理念.要注意挖掘知识内在联系,领会知识间的自然交汇.

3. 破解技巧:在复习备考的过程中,要把握好知识间的纵横联系与整合,打破数学内部章节界限,使自己对所学内容真正融会贯通,运用自如,形成网络化的知识体系.

4. 经典例题:

例8 甲、乙两人做射击游戏,甲、乙两人射击击中与否是相互独立事件,规则如下:若射击一次击中,原射击者继续射击,若射击一次不中,就由对方接替射击.已知甲、乙两人射击一次击中的概率均为$\dfrac{7}{8}$,且第一次由甲开始射击.

(1)求前4次射击中,甲恰好射击3次的概率;

(2)若第n次由甲射击的概率为a_n,求数列$\{a_n\}$的通项公式,并说明当n趋向于$+\infty$时的实际意义.

破解思路 本题以相互独立事件为背景,考查概率与递推数列,由递推关系求得通项公式,运用极限的思想说明问题的实际意义.

经典答案 记A为甲射击,B为乙射击,则

(1)前4次射击中甲恰好射击3次可列举为$AAAB,AABA,ABAA$,其概率为$P=\dfrac{7}{8}\times\dfrac{7}{8}\times\dfrac{1}{8}+\dfrac{7}{8}\times\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{8}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{63}{512}$.

(2)"第$n+1$次由甲射击"这一事件,包括"第n次由甲射击,第$n+1$次继续由甲射击"及"第n次由乙射击,第$n+1$次由甲射击"两事件,则有$a_{n+1}=\dfrac{7}{8}a_n+\dfrac{1}{8}(1-a_n)=\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{1}{8}$,其中$a_1=1$,$a_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)$,所以数列$\left\{a_n-\dfrac{1}{2}\right\}$等比数列.所以$a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$,当$n$趋向于$+\infty$时,$a_n$趋向于$\dfrac{1}{2}$.

实际意义为当甲、乙两人射击次数较多时,甲、乙两人分别射击的次数接近相等.

例9 甲、乙两人进行围棋比赛,约定每局胜者得1分,负者得0分,比赛进行到有一人比对方多2分或打满6局时停止.设甲在每局中获胜的概率为$p\left(p>\dfrac{1}{2}\right)$,且各局胜负相互独立.已知第二局比赛结束时比赛停止的概率为$\dfrac{5}{9}$.若图4为统计这次比赛的局数n和甲、乙各自的总得分数S,T的程序框图.其中如果甲获胜,输入$a=1,b=0$;如果乙获胜,则输入$a=0,b=1$.

(1)在图4中,第一、第二两个判断框应分别填写什么条件?

(2)求p的值;

(3)设ξ表示比赛停止时已比赛的局数,求随机变量ξ的分布列和数学期望$E\xi$.

破解思路 本题是概率与算法的综合题.破解的关键是读懂程序框图,结合程序框图求出p值;对于(3)先确定ξ的所有可能值,设每两局比赛为一轮,则该轮结束时比赛停止的概率为$\dfrac{5}{9}$,进而求得其分布列及数学期望.

经典答案 (1)程序框图中的第一个条件框应填$M=2$,第二个应填$n=6$.(答案不唯一.如:第一个条件框

填$M>1$,第二个条件框填$n>5$,或者第一、第二条件互换,都可以)

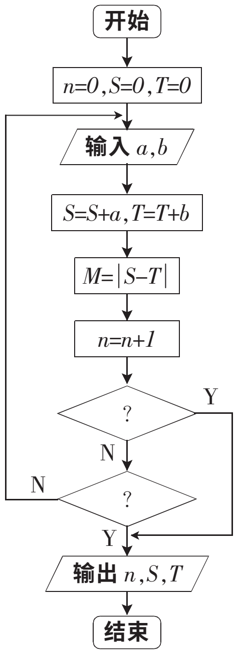

图 4

(2)依题意,当甲连胜2局或乙连胜2局时,第二局比赛结束时比赛结束,所以有$p^2+(1-p)^2=\frac{5}{9}$,解得$p=\frac{2}{3}$或$p=\frac{1}{3}$. 因为$p>\frac{1}{2}$,所以$p=\frac{2}{3}$.

(3)依题意知,ξ的所有可能值为2,4,6. 设每两局比赛为一轮,则该轮结束时比赛停止的概率为$\frac{5}{9}$. 若该轮结束时比赛还将继续,则甲、乙在该轮中必是各得一分,此时,该轮比赛结果对下轮比赛是否停止没有影响. 从而有$P(\xi=2)=\frac{5}{9}$,$P(\xi=4)=\left(1-\frac{5}{9}\right)\left(\frac{5}{9}\right)=\frac{20}{81}$,$P(\xi=6)=\left(1-\frac{5}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{5}{9}\right)\cdot 1=\frac{16}{81}$.

所以随机变量ξ的分布列为:

ξ	2	4	6
P	$\frac{5}{9}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{16}{81}$

故$E\xi=2\times\frac{5}{9}+4\times\frac{20}{81}+6\times\frac{16}{81}=\frac{266}{81}$.

例10 品酒师需定期接受酒味鉴别功能测试,一种通常采用的测试方法如下:拿出n瓶外观相同但品质不同的酒让其品尝,要求其按品质优劣为它们排序;经过一段时间,等其记忆淡忘之后,再让其品尝这n瓶酒,并重新按品质优劣为它们排序,这称为一轮测试. 根据一轮测试中的两次排序的偏离程度的高低为其评分.

现设$n=4$,分别以a_1,a_2,a_3,a_4表示第一次排序时被排为1,2,3,4的四种酒在第二次排序时的序号,并令$X=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|$,则$X$是对两次排序的偏离程度的一种描述.

(1)写出X的可能值集合.

(2)假设a_1,a_2,a_3,a_4等可能地为1,2,3,4的各种排列,求X的分布列.

(3)某品酒师在相继进行的三轮测试中,都有$X\leqslant 2$,

①试按(2)中的结果,计算出现这种现象的概率(假定各轮测试相互独立);

②你认为该品酒师的酒味鉴别功能如何?说明理由.

破解思路 本题以绝对值为载体,考查分布列和期望的简单应用以及阅读理解、转化化归能力. (1)X的可能取值集合为$\{0,2,4,6,8\}$,在1、2、3、4中奇数与偶数各有两个,a_2,a_4中的奇数个数等于a_1,a_3中的偶数个数,得到$|1-a_1|+|3-a_3|$与$|2-a_2|+|4-a_4|$的奇偶性相同;(2)可以用列表或者树状图列出1、2、3、4的排列,计算每种排列下X的值,算出概率,写出分布列.

(3)将三轮测试都有$X\leqslant 2$的概率记作p,求出概率的值和已知量进行比较,得到结论.

经典答案 (1)X的可能值集合为$\{0,2,4,6,8\}$. 在1,2,3,4中奇数与偶数各有两个,所以a_2,a_4中的奇数个数等于a_1,a_3中的偶数个数,因此$|1-a_1|+|3-a_3|$与$|2-a_2|+|4-a_4|$的奇偶性相同,从而$X=(|1-a_1|+|3-a_3|)+(|2-a_2|+|4-a_4|)$必为偶数,$X$的值非负,且易知其值不大于8,容易举出$X$的值等于0,2,4,6,8各值的排列的例子.

(2)可用列表或树状图列出1,2,3,4的一共24种排列,计算每种排列下的X值,在等可能的假定下得到

X	0	2	4	6	8
P	$\frac{1}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$	$\frac{4}{24}$

(3)①首先$P(X\leqslant 2)=P(X=0)+P(X=2)=\frac{1}{6}$,将三轮测试都有$X\leqslant 2$的概率记作$p$. 由上述结果和独立性假设,得$p=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}$. ②由于$p=\frac{1}{6^3}=\frac{1}{216}<\frac{5}{1000}$是一个很小的概率,这表明凭随机猜测得到三轮测试都有$X\leqslant 2$的结果的可能性很小,所以我们认为该品酒师确实有良好的味觉鉴别功能,不是靠随机猜测.

独立重复事件与二项分布、正态分布

1. 串联情况:(1)二项分布及其应用主要以条件概率、相互独立事件同时发生的概率、独立重复试验的概率为载体,综合考查某一事件发生的概率,进而通过计算期望与方差考查总体取值的平均水平和稳定性;(2)正态分布主要考查正态分布的意义和性质,通过把一般正态总体转化为标准正态,常以客观题的形式出现.

2. 考情分析:在每年的高考中都有考查,独立重复事件多以解答题的形式出现,而正态分布常出现在客观题中,偶尔也会在解答题中出现.

3. 破解技巧:(1)准确判断某随机变量是否服从二项分布,要看两点:①在每次试验中,试验的结果只

有两个，即发生与不发生；②在每次试验中，事件发生的概率相同. 若满足，则在此独立重复试验中以事件发生的次数为随机变量，此时该随机变量服从二项分布.

(2)理解正态分布曲线的意义及性质是解答此类问题的关键：如正态分布密度函数$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，图象关于直线$x=\mu$对称，均值为$\mu$，方差为$\sigma^2$等.

4. 经典例题：

例11 在一个圆锥体的培养房内培养了40只蜜蜂，准备进行某种实验，过圆锥高的中点有一个不计厚度且平行于圆锥底面的平面把培养房分成两个实验区，其中小锥体叫第一实验区，圆台体叫第二实验区，且两个实验区是互通的. 假设蜜蜂落入培养房内任何位置是等可能的，且蜜蜂落入哪个位置相互之间是不受影响的.

(1)求蜜蜂落入第二实验区的概率；

(2)若其中有10只蜜蜂被染上了红色，求恰有一只红色蜜蜂落入第二实验区的概率；

(3)记X为落入第一实验区的蜜蜂数，求随机变量X的数学期望EX.

破解思路　恰当地回归到相应的概率模型中去，是解答概率与统计应用问题的突破口. 只有找到合适的概率模型，我们才能迅速抓住问题的本质，进而设计相应的解题策略. 第1小题考查几何概型的"三维"测度问题；第2小题实际上可转化为独立重复事件的概率；对于第3小题，"落入第一实验区的蜜蜂数"服从二项分布，不必通过列随机变量分布图求数学期望，直接代公式即可.

经典答案　(1)记"蜜蜂落入第一实验区"为事件A，"蜜蜂落入第二实验区"为事件B. 依题意，$P(A)=\frac{V_{小锥体}}{V_{圆锥体}}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot S_{圆锥底面}\cdot\frac{1}{2}h_{圆锥}}{\frac{1}{3}\cdot S_{圆锥底面}h_{圆锥}}=\frac{1}{8}$，所以$P(B)=1-P(A)=\frac{7}{8}$，所以蜜蜂落入第二实验区的概率为$\frac{7}{8}$.

(2)记"恰有一只红色蜜蜂落入第二实验区"为事件C，则$P(C)=C_{10}^{1}\times\frac{7}{8}\times\left(\frac{1}{8}\right)^9=\frac{70}{8^{10}}=\frac{70}{2^{30}}$，所以恰有一只红色蜜蜂落入第二实验区的概率$\frac{70}{2^{30}}$.

(3)因为蜜蜂落入培养房内任何位置是等可能的，且蜜蜂落入哪个位置相互之间是不受影响的，所以变量X满足二项分布，即$X\sim\left(40,\frac{1}{8}\right)$，

$EX=40\times\frac{1}{8}=5$

例12 在某校举行的数学竞赛中，全体参赛学生的竞赛成绩近似服从正态分布$N(70,100)$. 已知成绩在90分以上（含90分）的学生有12名.

(1)此次参赛学生总数约为多少人？

(2)若该校计划奖励竞赛成绩排在前50名的学生，设奖的分数线约为多少分？可共查阅的(部分)标准正态分布表$\Phi(x_0)=P(x<x_0)$见表3.

破解思路　本小题主要考查正态分布，考查运用概率统计知识解决实际问题的能力.

经典答案　(1)设参赛学生的分数为ξ，因为$\xi\sim N(70,100)$，由条件知，$P(\xi\geqslant 90)=1-P(\xi<90)=1-F(90)=1-\Phi\left(\frac{90-70}{10}\right)=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228.$

这说明成绩在90分以上（含90分）的学生人数约占全体参赛人数的2.28%，因此，参赛总人数约为$\frac{12}{0.0228}\approx 526$(人).

(2)假定设奖的分数线为x分，则$P(\xi\geqslant x)=1-P(\xi<x)=1-F(x)=1-\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right)=\frac{50}{526}=0.0951$，即$\Phi\left(\frac{x-70}{10}\right)=0.9049$，查表得$\frac{x-70}{10}\approx 1.31$，解得$x=83.1$，故设奖的分数线约为83.1分.

表3

x_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.2	0.8849	0.8869	0.8880	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9278	0.9292	0.9306	0.9319
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

备考建议

1. 重视对审题能力的培养

概率统计问题，大都以应用题的面目出现，同学们由于审题不够细心而出错的现象比较普遍，出现的错误主要有：主观臆断、混淆事件、重复计算、遗漏条件. 因此我们要学会审题，培养自身的阅读理解能力，提高应用数学知识、方法分析问题和解决问题的能力.

2.回归教材，加强对概率思想、基本方法的理解

近几年高考中往往都是在考查对一些基本随机事件的求法，有些试题在教材中能找到相应的影子，在复习中要重视基本知识的掌握和落实，课本中的定理、定义、例题、习题都需要扎扎实实地吃透、消化. 金