

深度学习视角下的高三数学一轮复习： 问题与对策^{*}

夏诗伟 (江苏省盐城市田家炳中学 224001)

段志贵 (盐城师范学院数学与统计学院 224002)

杨元韡 (江苏省常州高级中学 213000)

摘要 在高三一轮复习中教师应以课标为引领,以高考评价体系为导向,以深度学习理论为指导,深化教育教学改革要围绕学科核心素养,立足教材,借助真题,帮助学生厘清基本概念,建构知识体系,内化通性通法,着力提升学生数学思维品质,促进学生深度学习.

关键词 深度学习;高三数学;一轮复习

文章编号 1004-1176(2023)08-0041-04

1 一轮复习存在的问题及其分析

一轮复习时间紧内容多,大多数学校以一轮复习资料或各学校自编讲义为主,很多教师知道要回归教材但又不知怎样回归,想在课堂上给学生预留时间但又怕完不成教学任务.如何在教学过程中培养学生的核心素养等一些问题的给一线教师带来了教学的矛盾与困惑.究其原因,是新高考改革时间不长,不少教师还没有改变原有教学方式,再者教者不了解《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》,不清楚《中国高考评价体系》和《中国高考评价体系说明》,以至于不知道高考考查的目的和需要培养学生具备怎样的能力.对于高三大多数学生来说,他们完全通过刷题来提高数学成绩,注重强化解题套路,对非常规方式呈现的试题就束手无策;对书本中的阅读知识没有应用意识,缺乏强烈的问题意识,在阅读中不注意体会问题本质;知识体系不够完善,综合能力比较欠缺,缺少对题型的感悟与知识的梳理.

2 一轮复习要回归教材追溯本质

深度学习在教育领域侧重于学生的学习方式的改进,对知识的迁移应用以及对学生高阶思维的培养.深度教学就是要遵循教育教学规律,将知识内容进行有机整合,帮助在学习过程中构建整体的知识体系,促进其核心素养发展^[1].为此,

一轮复习首要的策略就是回归教材,追溯知识的发生发展过程,追溯知识背后丰富的数学思想方法.

2.1 回归教材,辨析概念本质

一轮复习时很多知识学生已学过但记忆比较模糊,甚至有些遗忘.有些学生对某一模块不熟练,但对其他的模块相对比较熟练.因此一轮复习是对基本概念的梳理与巩固,重视概念的应用、理清知识点之间的联系与区别,让学生对知识概念有更新更深入的认识.

苏教版必修一第119页的“探究拓展”中不仅对函数图象关于点对称或直线对称做了拓展,还可由此引导学生提炼一般规律:关于点 (a, b) 对称的函数表达式可表示为 $f(x) + f(2a - x) = 2b$,关于直线 $x = a$ 对称的函数表达式可表示为 $f(x) = f(2a - x)$.很多学生对周期性表达式与对称性表达式容易混淆,如“若 $f(x + a) + f(x) = c(a \neq 0)$,则 $T = 2a$ ”“若 $f(x + a) + f(x + b) = c(a \neq b)$,则 $T = 2|a - b|$ ”,从表达式看的确与对称性有相似,但周期的代数表达式中是括号内的差值为常数,而对称性的代表表达式中则是括号内的和为常数.

例1 (2018全国Ⅱ卷文第12题)已知 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty, +\infty)$ 的奇函数,满足 $f(1 - x) = f(1 + x)$.若 $f(1) = 2$,则 $f(1) + f(2) + \dots +$

^{*} 本文系江苏省高等学校教改重点课题“新师范背景下‘学科教学论’课程与教学持续改进研究”(2021JSJG132)的阶段性成果.段志贵为本文通讯作者.

$f(50) = ()$.

A. -50 B. 0 C. 2 D. 50

解 由 $f(1-x) = f(1+x)$ 且 $f(x)$ 为奇函数, 得 $-f(-1+x) = f(1+x)$, 于是 $f(x)$ 为周期函数, $T = 2 \mid (1+x) - (-1+x) \mid = 4$. 又 $f(0) = 0$, 故 $f(2) = f(0) = 0$, $f(-1) = -f(1) = -2$, 从而 $f(1) + f(2) + f(3) + f(4) = 0$, 故 $f(1) + f(2) + \cdots + f(50) = f(1) + f(2) = 2$.

从教材基本概念入手, 指导学生认识知识点间的区别与联系, 搭建知识点交汇的桥梁, 获得数学概念和规则. 在建立知识框架体系的过程中, 让学生对知识的本质有更深入的认识, 能灵活地应用概念.

2.2 深究教材, 拓展知识广度

教师站得高, 才能引领学生看得远, 教师是学生学习的引路人, 教师站立的高度决定了学生的视野. 课堂教学必须突出强烈的问题意识, 让学生在阅读感悟中体会问题本质, 我们除了要钻研所教教材中的概念, 更要研究与教材概念相关联的知识, 拓展学生的知识广度、提高学生的解题能力.

例 2 (2020 全国卷 II 理科第 21 题(2)) 已知函数 $f(x) = \sin^2 x \sin(2x)$, 证明: $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

本题可利用苏教版必修一第 66 页“阅读与探究”中的基本不等式的推广进行证明.

证明 $f^2(x) = \sin^4 x \sin^2(2x) = 4\sin^6 x \cos^2 x = 4\sin^6 x (1 - \sin^2 x) = \frac{4}{3} \sin^2 x \sin^2 x \sin^2 x (3 - 3\sin^2 x) \leq \frac{4}{3} \left(\frac{3\sin^2 x + 3 - 3\sin^2 x}{4} \right)^4 = \frac{27}{64}$, 当且仅当 $\sin^2 x = 3 - 3\sin^2 x$ 即 $\sin^2 x = \frac{3}{4}$ 时取等号, 故 $|f(x)| \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$, 得证.

此类阅读题不仅能拓展学生的知识面, 更能促进学生对知识的融会贯通、灵活运用. 纵观近几年的高考试卷, 都没有突破高中数学知识范围, 更没有超越教材以外的内容. 因此, 教师在教学中不仅要“四能”提升作为教学的主要任务, 还应渗透数学核心素养的培养.

3 一轮复习要围绕学科核心素养

作为一线教师, 对素养导向下的高考评价体

系的理解与实践, 最直接的体现就是对数学试题的分析. 而高中生解题更多的是根据经验积累与直观感觉, 缺少对题型的感悟与对知识的梳理. 教师对一典型问题的通性通法进行讲解, 有利于学生掌握解题方法, 有助于学生形成基础知识网络结构, 使学生知识能力被梳理得脉络清晰^[2]. 学生在不断总结经验的过程中, 将经验内化, 养成解决问题的常规方法, 在知识建构和思想引领中形成自我解题方法和思维模式, 实现思维的内化.

如在教材数列求和中, 对于 $\{(kn+d)(b_1q^n)\}$ 型数列我们通常用错位相减的方法, 而对 $\left\{\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right\}$ 型数列用裂项相消的方法. 以 2021 年高考真题为例, 用错位相减法的题型分布在新高考 I 卷第 16 题、浙江卷第 20 题、全国乙卷文科第 19 题. 而很多学生对错位相减法容易记住, 但计算比较困难, 容易出错且不容易化简. 对此, 可以加强题型训练, 将这两种方法合二为一, 都转化为裂项相消法, 方便学生记忆并减少计算出错, 不失时机地提高学生的运算素养.

例 3 (2021 浙江卷第 20 题(2)) 求数列 $b_n = (n-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$ 的前 n 项和 T_n .

解 可令 $f(n) = (kn+b)\left(\frac{3}{4}\right)^n$, $b_n = f(n+1) - f(n)$, 于是, $b_n = [k(n+1)+b]\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} - (kn+b)\left(\frac{3}{4}\right)^n = \left(-\frac{1}{4}kn + \frac{3}{4}k - \frac{1}{4}b\right)\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

又 $b_n = (n-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n$, 则 $\begin{cases} -\frac{1}{4}k = 1, \\ \frac{3}{4}k - \frac{1}{4}b = -4, \end{cases}$ 得

$\begin{cases} k = -4, \\ b = 4. \end{cases}$ 因此, $b_n = (4n-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4n\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$, 用裂项相消法得 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = (4 \times 1 - 4)\left(\frac{3}{4}\right)^1 - 4 \times 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + (4 \times 2 - 4)\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \times 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots + (4n-4)\left(\frac{3}{4}\right)^n - 4n\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = -4n\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$.

深度学习是一种主动、批判、有意义的学习方式, 其目的是发展高阶思维, 具有批判理解、信息整合、反思建构、迁移运动的特点^[3]. 数学运算是

核心素养之一.新高考试卷对学生的运算要求较高,许多学生由于运算达不到要求,完成试卷就显得很困难.在教学中要实现“做一题,通一类;得一法,通一片”的学习效果,不仅提高学生解决问题的效率,提升自己对数学知识的感悟,由此使学生对数学学习更有信心,促使学生从学习型转变为研究型,不断深化对数学知识的理解与应用.

从素养导向的理解来看,研究高考试题还可以将知识教学、习题解答、问题解决与素养的理解更加紧密地联系起来,从而实现素养引导教学、评价,在教学与评价中更好地理解素养的良性互动^[4].在复习中,我们应把握好“思”与“算”的辩证关系,重视通性通法以及知识点间的融会贯通,提升运算求解能力.高考不仅考查单独的知识点,更考查知识点的灵活运用,一轮复习已经突破新课学习时模块独立的学习方式,是学生提升综合能力的重要过程,因此要站在系统整体的高度理解知识,构建立体化的知识网络,帮助学生从高考真题中感受知识网络的搭建过程,强化学生独立思考的习惯,增强模块之间的相互联系,增进分析和解决问题的能力.

4 一轮复习要注重思维品质培养

一轮复习不仅要提高学生的解题能力,更要在解题复习中提升学生的思维品质.正如郑毓信教授认为数学深度教学是指数学教学必须超越具体知识和技能深入到思维的层面,由具体的数学方法和策略过渡到一般性的思维策略与思维品质的提升^[4].深度教学,一方面从知识的本质内涵深入研究,深刻理解和充分掌握知识本质属性和内在联系;另一方面从提升学生的思维能力入手,引导学生重视对基础知识和基本思想方法的深入理解和综合运用,将核心素养内化为学生自身能力.

4.1 放慢课堂节奏,培养思维深刻性

学习的过程是自我感悟的过程,课堂需要慢一点,给一点时间让学生动手做、动脑思,更要让学生学会反思自我解题活动的心路历程.有一位大学数学教授说过,学数学只有慢、不片面地追求速度、反复思考,才能深入理解、透彻领会,真正掌握数学的精髓和真谛.而当前高三复习有很多的试题训练,很多学生对错误的题目急于订正,订正好题目就万事大吉,没有反思自己做题错误的原因,也不总结成功的经验,这是本末倒置.

教学中对思维能力的培养,不宜将能激发思维的问题或思考点只用直白问题直接呈现,而要把需要思考的关键点放慢一点,让学生有思考的时间和空间,自己读题,说一说想法,分析如何继续思考问题、解决问题.否则就失去激发学生思维的机会,没有起到培养学生提出问题、解决问题的能力效果.学生不仅需要知道怎么做题,更要知道如何想到怎么解题.重视学生学习过程,在过程中掌握数学方法,解决实际问题,养成高品质的思维模式,培养思维的深刻性,促进逻辑思维能力发展,形成规范化思考问题的品质.

例 4 (2021 八省联考第 7 题) 已知抛物线 $y^2 = 2px$ 上三点 $A(2, 2)$, B, C , 直线 AB, AC 是圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 则直线 BC 的方程为().

- A. $x + 2y + 1 = 0$ B. $3x + 6y + 4 = 0$
C. $2x + 6y + 3 = 0$ D. $x + 3y + 2 = 0$

常规解法是设过点 A 的直线 $y - 2 = k(x - 2)$, 由与圆相切计算 k , 两切线方程分别与抛物线联立算出点 B, C 坐标, 得出直线 BC 的方程. 这种做法运算量大. 课堂上学生提出由直线 AB, AC 是圆 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线, 分别用点的坐标来表达, 并向着点 B, C 坐标进行一次化简转化, 即可得直线 BC 的方程. 设 $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 则 $AB: y - 2 = \frac{y_1 - 2}{x_1 - 2}(x - 2)$, 由点 $A(2, 2)$ 在抛物线上, 可得 $p = 1$, 则由 $y_1^2 = 2x_1$ 得 $AB: (y_1 + 2)(y - 2) = 2(x - 2)$, 因为直线 AB 与 $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ 相切, 所以 $\frac{2 | y_1 + 2 |}{\sqrt{4 + (y_1 + 2)^2}} = 1$, 即 $3(y_1 + 2)^2 - 4 = 0$, 故 $3y_1^2 + 12y_1 + 8 = 0$, 又 $y_1^2 = 2x_1$, 故得 $3x_1 + 6y_1 + 4 = 0$. 同理可得 $3x_2 + 6y_2 + 4 = 0$, 经过两点的直线有且仅有一条, 所以 $BC: 3x + 6y + 4 = 0$. 学生说这种方法做过, 原来此方法源于 2021 年苏教版选择性必修第一册第 19 页第 13 题.

不仅学生需要反思, 教师在课堂中也需要反思. 有时我们精心备课的内容在课堂上呈现时, 学生与我们总会有不一样的想法, 有时学生思考问题的方法更精彩. 这就要求我们要相信学生, 放手让学生去想、去做, 敢于表达自己的意见. 在数学学习、解题过程中逐步培养系统视角、联系观点、整体认识, 多角度体会解题, 在算理引领下精准运算, 提升思维的深刻性、灵活性、创新性.

4.2 加强交流讨论,培养思维创造性

教师在一轮复习教学过程中要建立完整的教学体系,以多样化的题型培养学生实际解决问题的能力,提高学生的综合能力,让学生的思维得到锻炼,挖掘学生的数学思想和核心素养^[5].纵观近两年全国各地高考数学试题,不难发现,新课程标准中所列的教学内容,在高考中都可能涉及.

近两年高考试题非常注重创新性,有试题问题域的创新,如 2020 年北京卷第 21 题数列及函数关系问题,2021 年新高考 I 卷第 12 题柱体问题,2022 年新高考 I 卷第 20 题概率与统计问题,2022 年新高考 II 卷第 7 题棱台的外接球问题;有题型的创新,如 2022 年新高考 I 卷第 14 题答案不唯一,2022 年新高考 II 卷第 21 题条件三选二、再推三,2021 年全国甲卷理科第 18 题;有试题难易度分布的创新,不再如以往的高考卷由易到难,现在的难易度分布如山峰式的变化.因此,一轮复习要加强教学的针对性,要设计一些探索或有讨论的问题,让学生开阔思路,丰富想象;学生相互之间也可以编制一些题目,相互之间展开讨论,促使学生克服思维定势,从全新的角度进行思考问题,对于问题获得一种新的认识,以达到对问题的解决.学生面对异于常规、新颖的问题时思维要能够发散,并能创造性地解决问题.

4.3 重视一题多解,培养思维灵活性

涂荣豹教授认为:现在提出的“数学核心素养”就是通常所说的思维能力,思维即“思考”,数学素养本质应当是数学思考^[6].如何将课堂上所学的数学知识运用到实际中?学生思维的灵活性至关重要.思维灵活性强的学生可以从多角度、多方向思考问题,能够将所学知识进行迁移,综合地分析问题、思考问题、解决问题.在课堂教学中进行一题多解训练,是培养学生思维灵活性的有效途径.

例 5 (2022 全国新课标 I 卷第 7 题) 设 $a = 0.1e^{0.1}$, $b = \frac{1}{9}$, $c = -\ln 0.9$, 则().

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

对本题的常见解法有两种:一是构造函数;二是利用泰勒展开式.本题还可以借助 $f(x) = \ln x$ 的上凸性,得 $f'(10) < \frac{f(10) - f(9)}{10 - 9} < f'(9)$,

于是 $\frac{1}{10} < \ln \frac{10}{9} < \frac{1}{9}$, 可得 $\frac{10}{9} > e^{\frac{1}{10}}$, $\frac{1}{9} > -\ln \frac{9}{10}$,

因此 $\frac{1}{9} > \frac{1}{10}e^{\frac{1}{10}}$, $\frac{1}{9} > -\ln 0.9$, 所以 $\frac{1}{9}$ 最大.由 $e^x \geq x + 1$ 可得 $a > 0.1 \times (1 + 0.1) = 0.11$, 由当 $x \geq 1$ 时 $\ln x \leq \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$, 可得 $c = \ln \frac{10}{9} < \frac{1}{2}\left(\frac{10}{9} - \frac{9}{10}\right) = \frac{19}{180} < 0.11$, 于是 $a > c$.

课堂中对具体题目的讲解,要鼓励学生多方面思考,用多种方法解决.一题多解对于个体而言是知识广度和思维能力的体现,而对于群体而言则是思维能力的叠加.这不仅能鼓励学生与他人分享知识经验,帮助学生构建基础知识逻辑,形成概念框架体系,而且在掌握知识技能的同时深入认识知识的内在联系.

在一轮复习中我们要立足教材,充分认识知识生成、发展和运用的过程,领悟教材所渗透的数学思想和方法,同时也要活用教材,以真题为参考,重视知识点之间的融会贯通,搭建完整的知识体系.“数学是思维的体操”,要让学生通过课堂教学感悟数学、学会思考并能多维度地思考解决问题的方法,提升数学思维能力.学生不仅能够学会数学、使用数学,更能进行“再创造”.由深度教学促进学生的深度学习,使学生经历从“学会”到“会学”再到“乐学”的螺旋上升、良性循环的学习路径,能够提高其数学思维能力,促进思维品质的养成以及数学核心素养的培育与发展.

参考文献

- [1] 陈杨,刘桂宏.我国教育领域深度学习研究的热点及展望——基于 Cite Space 的可视化分析[J].才智,2021(35):1-4.
- [2] 章建跃.注重通性通法才是好数学教学[J].中小学数学(高中版),2011(11):50.
- [3] 阎乃胜.深度学习视野下的课堂情境[J].教育发展研究,2013(12):76-79.
- [4] 郑毓信.数学教学的关键[M].上海:华东师范大学出版社,2022:105-106.
- [5] 周福.新高考评价体系下的高中数学课堂深度学习[J].数理化解题研究,2021(15):39-40.
- [6] 段志贵.教学生会思考是数学教学的根本——访南京师范大学涂荣豹教授[J].中学数学教学参考,2019(1/2):8-11.