

基于“解题能力发展”的高三一轮复习策略分析

夏 华 江苏省南通市海门四甲中学 226100

[摘 要] 教有教法,学有学法,贵在得法.高三数学一轮复习作为建构有序化、条理化、系统化、网格化知识的关键时期,对学生的发展有着重要影响.从整体出发,制定复习计划可从知识、方法与思维三个层次进行思考.在“以生为本”的基础上,带领学生对知识进行追根溯源、纠错反思、滚动练习,并在例题教学中严谨审题、变式训练、解后反思等,为形成良好的解题技巧夯实基础.

[关键词] 复习;以生为本;解题能力;思维

高三一轮复习旨在通过全面复习来巩固学生的知识基础,完善学生的认知结构,提升学生的解题能力.一轮复习具有内容多、时间长等特点,是高三整个复习阶段的基础工程,需要教师带领学生从核心知识出发,通过数学思想方法的梳理,深化学生对知识本质的认识,提高解题能力.

整体出发,制定复习计划

数学是一门系统性学科,数学教育应注重结构体系的关联性、系统性与逻辑性.一轮复习,应着重关注各部分知识间的联系,通过联想、类比、迁移等方式,让学生感知知识间的内在关系,领悟数学是一门整体性学科.

从系统论出发,将教学材料所提供的信息系统地组织起来,会超越部分材料所提供的信息之和.同时,结构化的复习模式便于学生理解、检索与记忆.从高三复习角度来看,将各单元分散的知识纳入整体知识结构中,不仅能形成系统的认知框架,还能凸显数学活力.高三一轮复习结

合数学知识间的联系与逻辑结构,将零碎、局部、分散的知识与解题思想方法等串珠成链,形成结构化、网格化的知识体系.

案例1 “函数”的复习.

1. 知识层面

从基础知识的层面来看,函数主要有概念、性质、图象等内容.一轮复习与新课授课最大的区别在于学生所站的高度不一样,新课授课是将每个知识点研究透彻,而一轮复习则

是高屋建瓴地从全局出发,将知识结构清晰地罗列在一起,形成便于理解的知识网络.

本章节的知识结构如图1所示,这张图可帮助学生完善认知体系,为制定完整的复习计划奠定基础.

2. 方法层面

函数研究方法主要有三个层次:①宏观层,即从一元函数与二元函数出发进行分析;②中观层,针对函数的解析式进行分析;③微观层,针对

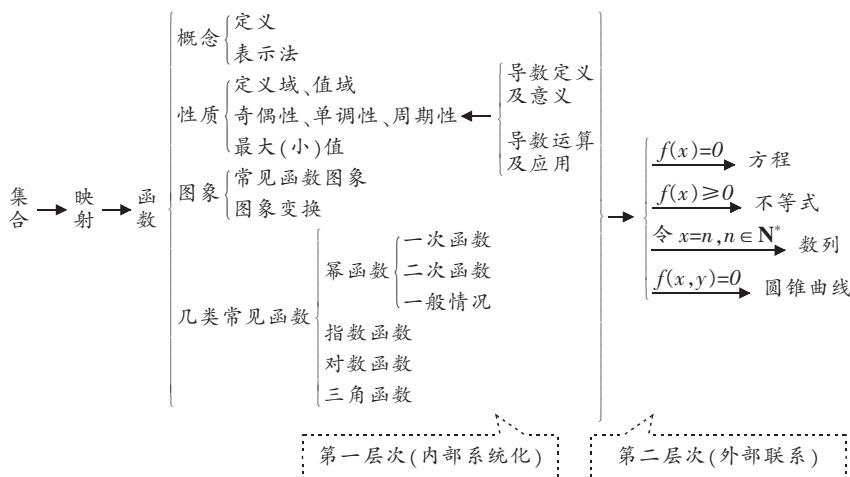


图1

作者简介: 夏华(1984—), 中小学高级教师, 南通市骨干教师, 从事高中数学教学工作, 曾获江苏省基础教育青年教师教学基本功大赛(高中数学)一等奖.

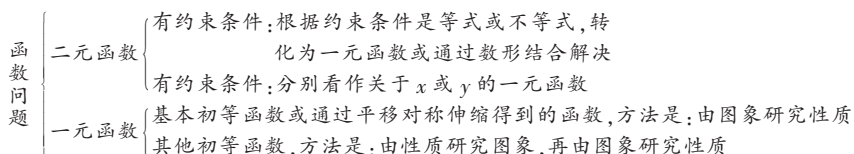


图2

具体问题进行分析.这三个层次逐层深入,直至形成良好的解题技巧.复习时,教师可带领学生从方法维度着手进行分析.(图2为宏观层面的方法)

3. 思想层面

思想是指学生对已有知识与方法进行高阶概括后,提炼出渗透在知识与方法中的数学思想,可为解决实际问题提供指导.良好的数学思想方法是数学能力的体现,也是对知识进行宏观梳理的高阶层次.如通过本章节复习,学生会发现应用“运动变化”的观点可建构函数模型,而利用函数性质来解决问题即为函数思想等.据此,笔者提出如下问题.

问题 在锐角三角形 ABC 中,已知 $\sin A = 2\sin B \sin C$, 求 $\tan A \tan B \tan C$ 的最小值.

解析 本题涉及三角函数,且变量较多,函数名称也不统一,因此本题具有一定难度.解题时,可从以下两个步骤进行分析:

第一步,缩减变量.结合三角形内角和定理,用角 B, C 来表示角 A ,可得 $\sin A = \sin(B+C) = \sin B \cos C + \cos B \cdot \sin C = 2\sin B \sin C$.

因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形,所以 $\cos B > 0, \cos C > 0$. 把弦转为切,得 $\tan B + \tan C = 2\tan B \tan C$. 又 $\tan A = -\tan(B+C)$, 所以 $\tan A \tan B \tan C = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C} \times \tan B \tan C = -\frac{2(\tan B \tan C)^2}{1 - \tan B \tan C}$. 此时三个变量转化成了两个变量.

第二步,将 $\tan B \tan C$ 视为一个整体,设为变量 t , 则 $\tan A \tan B \tan C = -\frac{2t^2}{1-t}$. 此时将原问题转化成了仅有一个变量的函数的最值问题,原问题便迎刃而解.

从整体出发制定复习计划,是带领学生从宏观角度来看待学习的过

程.以函数的复习为例,从知识、方法与思想三个层面进行剖析,让学生细致入微地将函数的结构、内容、相关问题摸排清楚,夯实“四基”的同时,也提升了“四能”.

以生为本,有效实施复习

新课标明确提出学生才是课堂的主人,任何教学活动的开展均需建立在“以生为本”的基础上进行,高三一轮复习亦不例外.教师应在充分了解学生的情况下发展学生的解题能力,为建构蓬勃生机的课堂奠定基础.

1. 追根溯源,掌握知识本质

想让学生从根本上掌握知识的本质,就要让学生明白知识从何而来,又向何方而去.对于最基础的概念、公式、法则等,不少高三学生都存在这样的问题:只知其然,而不知其所以然.复习时,为了让学生达到知其然且知其所以然的地步,教师可在“以生为本”的基础上设置一些由浅入深的问题串,让学生感知知识的形成与发展历程.

案例2 “两角和与差的三角函数”的复习.

问题1 两角差的余弦公式是如何推导出来的?(结论:向量数量积的运算)

问题2 两角和的余弦公式是如何得到的?(结论:角的变换、整体思想)

问题3 两角和的正弦公式是怎么得到的?(结论:三角函数的转化)

问题4 还有什么公式?(结论:引出倍角公式,强化“角的变换”)

上述4个问题由浅入深地揭示了“两角和与差的三角函数”所涉及的知识,让学生追根溯源到每一种公式,为建构完整的认知结构奠定了基础.笔者发现,不少教师复习本节课内容时,对各个公式基本是一带

而过,课堂教学重点都放在“角的变换”与“三角函数的转化”等解题方法与技巧中,显然是舍本逐末.

在复习过程中,若追根溯源探公式,则能让学生从本质上理解“向量数量积”这个核心知识,体会公式推导过程中涉及的一些数学思想方法等.因为一轮复习以基础为主,所以还需要带领学生回归教材,从基本的概念、定理、法则出发,将核心概念、定理推理以及典型例题作为教学蓝本进行温故、引申.

2. 结合实际,在纠错中反思

部分教师由于有丰富的教学经验,故在课堂中自然而然地凭借自己的主观意愿带领学生复习,按照自己的思路方法选择、讲解复习内容,完全忽视了学生的实际需求.这种代替学生思考、讲解、总结的复习方式,不仅脱离了实际,还让学生长期处于被动的状态,因此出现了听不进、记不住、考不好的现象.

经过时间长河的洗礼,不少学生对之前接触过的知识出现了遗忘.在一轮复习中,教师应结合学情,在学生思维的薄弱点处设置问题串,帮助学生纠错的同时,固化学生的解题思路,让学生学会自主反思,取得长足进步.

案例3 基本不等式在最值问题中的应用.

问题 已知 x, y 均为正数,且满足 $x+2y=1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最小值是多少?

错解 根据 $1=x+2y \geq 2\sqrt{2xy}$, 可得 $xy \leq \frac{1}{8}$, 也就是 $\frac{1}{xy} \geq 8$. 那么 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{1}{xy}} \geq 4\sqrt{2}$.

错因 学生在主观上没有重视基本不等式成立的条件,导致错误发生.

正解 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+2y) = \left(\frac{2y}{x} + \frac{x}{y}\right) + 3 \geq 2\sqrt{2} + 3$, 当且仅当 $x = \sqrt{2} - 1, y = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ 时取等号.

为了避免类似问题再次发生,笔

者从学生现有经验出发,巧用变式训练,强化学生对基本不等式成立条件的认识,为后续解题奠定基础.

变式题1 已知 x, y 均大于0,同时 $x+y=1$,则 $f(x, y)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$ 的最小值是多少?

解析 根据 $f(x, y)=xy+\frac{2}{xy}-2$,设 $xy=t$,则 $0<t\leq\frac{1}{4}$, $f(t)=\frac{1}{t}+\frac{2}{t}-2$. 因为 $f'(t)=1-\frac{2}{t^2}<0$,所以 $f(t)$ 在 $t\in\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 上呈单调递减,所以 $f(t)_{\min}=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{25}{4}$.

变式题1应用在学生解题反思的过程中,强化学生模式识别能力的发展,让学生加深对基本不等式成立条件的认识.当条件不满足时,需要另辟蹊径——变式题1就是从函数的单调性入手分析的.

变式题2 已知 x, y 均大于0,同时 $x+y=k$,则 $f(x, y)=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)$ 的最小值是多少?

变式题2以字母代替具体数字的目的在于引导学生围绕基本不等式成立的条件进行思考,从根本上认识基本不等式成立的条件,能有效锻炼学生分类讨论的能力.

在教学中,教师借助一些典型问题由浅入深地逐层剖析,常能让学生在探究中掌握问题的本质与内涵,让学生学会从一个较高的视角来分析问题.典型问题从何而来?其实都来自学生对具体问题的理解程度.因此,教师从根本上把握学情是实施二次备课的必要条件.

例题教学,实现知识再认识

学生思维能力的强弱最终都显化在解题能力上,尤其是对基础概念、公式等的理解,不能浮于表面而应深入知识的应用阶层,让学生在“实战”中再认识知识本质,并通过解题反思抓住知识形态,达到“以不变应万变”的境界.

1. 注重审题

审题是解题的首要环节,不少学生在思想上不重视审题,常常因为没有理解题意而导致解题失败.在复习教学中,教师应注重学生审题能力的培养,引导学生通过审题来领悟问题的本质.

例如有这样一道题:已知函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上,且满足 $f(f(x))-x^2+x=f(x)-x^2+x$,若有且仅有一个实数 x_0 能让 $f(x_0)=x_0$,请写出函数解析式.

不少学生审阅本题时,没有完全理解题意,导致解题失败.其实,本题从函数概念的图形表征出发,不难发现所求问题的本质为函数概念与不动点的含义.一旦掌握了图形语言,学生就能顺利完成数形转换,从根本上掌握问题的内涵.

2. 变式应用

变式是发散学生思维,拓宽学生视野的重要方式.如一题多解,则以一个核心目标为出发点,学生的思维沿着不同的路径探寻问题的答案,对培养学生的发散思维具有重要作用;而多题一解,则是将不同问题的信息集合在一起,形成统一的解题思路,对培养学生的聚合思维具有重要作用.利用变式将以上两者结合在一起,不仅能提高学生的认知水平,还能有效促进学生数学思维的发展.

案例4 “三角函数‘角的变换’”的复习.

原题 若 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos\beta=-\frac{3}{5}$, $\beta\in\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, 则 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值是多少?

原题难度系数较小,学生很快就获得了问题答案(略).

变式题1 若 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$, 且 α, β 都是锐角,则 $\cos\beta$ 的值是多少?

投影学生的两种解法.

解法1 (角的变换)从 $\cos\beta=\cos[(\alpha+\beta)-\alpha]$ 获取答案.

解法2 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot$

$\sin\beta=-\frac{3}{5}$ (*). 根据 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, 可得 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$. 设 $\cos\beta=x$, 则 $\sin\beta=\sqrt{1-x^2}$, 将

其代入(*)式中,得方程 $\frac{\sqrt{5}}{3}x -$

$\frac{2}{3}\sqrt{1-x^2}=-\frac{3}{5}$, 解方程得 $\cos\beta$.

解法2设变量、建方程,即使稍显复杂,也是一种解法.笔者投影这两种解法,意在让学生通过类比分析,感知“角的变换”的灵活性,为学生获得触类旁通的解题能力奠定基础.

变式题2 若 $0<\beta<\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$, $\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\beta\right)=\frac{5}{13}$, 则 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值是多少?

思路1 (变化待求角的形式)

$\sin(\alpha+\beta)=-\cos\left[(\alpha+\beta)+\frac{\pi}{2}\right]=-\cos\left[\left(\beta+\frac{3\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]$.

思路2 (变化已知角的形式)

$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{3}{5}$, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\left[\left(\beta+\frac{3\pi}{4}\right)-\left(\frac{3\pi}{4}-\alpha\right)\right]$.

纵然两种解题思路不一样,但都是用已知角表示待求角,也就是说解法不同、目的一致.两种解法类比,更凸显三角函数“角的变换”的本质.变式应用与一题多解,能让学生对知识本质的认识更加明确.

3. 解后反思

解题后的及时反思是促进学生元认知能力发展的重要途径,也是对知识本质实现再认识的关键.良好的反思习惯并不是一朝一夕就能形成的,需要教师以身作则、长期引导与示范.

总之,提高高三数学一轮复习的实效需要教师基于“立德树人”的理念,充分理解学生、理解数学、理解教学,将学生视为课堂的主体,使学生在自主探索与合作交流中不断发展数学思维、提高思维品质、提升数学核心素养.