

## 概率与统计板块第二轮复习备考建议

广东省梅州市丰顺县丰顺中学(514300) 马满芳

广东省华南师范大学数学科学学院(510631) 马佩雯

**摘要** 概率与统计板块是高考的一个重要考点. 为了更好地为一线教师开展二轮复习, 本文通过评析近3年新课标卷概率与统计考点, 归纳了6种常考题型, 剖析命题特点, 提出了相应的备考建议.

**关键词** 高考; 概率与统计; 常见题型; 分析; 备考建议

实施新课标以来, 概率与统计板块变成了高考考查的热点和难点, 不仅考查学生的基本知识, 还考查学生的数据处理能力和应用意识, 对其建模能力和探究意识也提出了一定的要求, 学生对于解决此类问题的信心不够. 在高三二轮复习中, 有针对性地做好这部分内容的复习备考, 可以做到事半功倍.

### 一、2016-2018年全国新课标I卷高考考点及分析

表1: 全国I卷2016-2018年文理科概率与统计考点分布表

|    | 2016年           |                | 2017年                |                 | 2018年                 |                    |
|----|-----------------|----------------|----------------------|-----------------|-----------------------|--------------------|
|    | 理科              | 文科             | 理科                   | 文科              | 理科                    | 文科                 |
| 小题 | 第4题: 几何概型       | 第3题: 古典概型      | 第2题: 几何概型            | 第4题: 几何概型       | 第3题: 统计<br>第10题: 几何概型 | 第3题: 饼图            |
| 大题 | 第19题求概率分布列、数学期望 | 第19题函数、柱形图、平均数 | 第19题正态分布、二项分布、平均数与方差 | 第19题相关系数、均值与标准差 | 第20题求二项分布的最值、计算期望值    | 第19题频率分布直方图; 频率与均值 |

\* 近三年《概率与统计》小题都在选择题里考查

#### 考点分析

全国新课标I卷对概率与统计的考查比较稳定, 基本为一小一大(2018年理科I卷是两小一大), 分值17分-22分, 难度中等偏难. 在大数据的时代背景下加强概率与统计的考查可能会成为一种趋势.

小题主要考查古典概型、几何概型(理科有时也会考查对立事件、相互独立事件概率及独立重复试验的概率). 试题难度不大, 要求较低;

大题主要考查以频数分布表、频率直方图、柱状图、茎叶图、折线图为载体, 理科侧重考查随机变量的分布列及期望, 文科侧重考查样本数字特征的应用. 突出了对应用意识(理科常常涉及决策问题, 文科常需对统计量进行说理)、数据处理能力及创新能力的考查.

#### 试题特点

(1) 题目较长, 阅读量较大.

(2) 题目背景多为生产、生活实际问题.

(3) 数据多、关系复杂、运算量较大.

从历年的概率与统计的试题来看, 本模块考题阅读量大, 理解难度高, 对学生能力要求高, 充分考查了考生的抽象概括能力、数据处理能力, 还综合考查了运用求解能力、推理论证能力、应用意识等. 全国新课标数学试题强调以能力立意, 突出考查数学建模、数据分析等数学学科核心素养.

文科2015年第19题、2016年第19题、2017年第19题; 理科2015年第19题、2017年第19题、2018年第20题的试题难度较大, 变成了高考的压轴题之一.

### 二、几种常见题型

概率与统计高考试题中概率知识与统计知识有一定的交汇性, 经常以统计图表为载体, 结合图表中的数据, 运用频率估计概率的思想来计算概率. 但从教材知识点的角度, 下面对概率部分与统计部分的常考题型进行了归纳分析.

#### (一) 概率部分

##### 题型一 事件及其概率

事件及其概率是高考必考内容, 经常是以选择题、填空题或者解答题的方式考查事件的关系和运算, 以及古典概型、几何概型、条件概率. 理科重点考查古典概型、几何概型、对立事件、相互独立事件概率及 $n$ 次独立重复试验的概率, 文科重点考查古典概型(列举法)、几何概型.

表2: 近三年事件及其概率考查情况表

| 年份   | 全国I卷      | 全国II卷      | 全国III卷 |
|------|-----------|------------|--------|
| 2018 | 理10、20(1) | 理8/文5      | 理8/文5  |
| 2017 | 理2/文4     | 理18(1)/文11 | 文18    |
| 2016 | 理4/文3     | 理10/文8、18  |        |

选择题和填空题是必拿满分的题目, 难度不大, 主要考查基本概念与基本公式, 在复习过程中需要回归教材, 明确相关概念, 理清各种概率模型及其适用范围, 重视课本的例题以及习题. 解答题在求概率时, 应该先设出有关事件(用字母表示事件), 再计算相关概率, 最后再用文字作答, 不能只有数学符号而没有对应的文字.

例1 (2014年高考全国I理科第5题) 4位同学各自在周六、周日两天中任选一天参加公益活动, 则周六、周日都有同

学参加公益活动的概率为( )

- A.  $\frac{1}{8}$     B.  $\frac{3}{8}$     C.  $\frac{5}{8}$     D.  $\frac{7}{8}$

**评析** 这道题是计数原理的直接应用,其实也是课本习题的变式.古典概型的考查一般是考查计数原理(理科)或者列举法(文科)或树形图.古典概型的考查经常与对立事件相结合,当正面问题比较复杂时,往往考虑其对立事件.

#### 题型二 离散型随机变量的分布列、均值和方差

表 3: 近三年离散型随机变量考查情况表

| 年份   | 全国 I 卷     | 全国 II 卷 | 全国 III 卷 |
|------|------------|---------|----------|
| 2018 | 理 20(2)    |         |          |
| 2017 |            |         | 理 18     |
| 2016 | 理 19(1)(3) |         |          |

离散型随机变量是新课标理科卷(特别是(I)卷)解答题常考题型,文科不考.一般是两种形式的考查:

一是利用随机事件的概率性质、公式求分布列,然后求期望和方差,如 13 年全国 I 卷理科 19 题.在解题过程中应注意:求离散型随机变量的分布列的关键是求随机变量所有取值对应的概率,在求解时,要注意计数原理、古典概型等知识的应用.离散型随机变量  $\xi$  要找全找对,并理解  $\xi$  取每一个值的含义.在求离散型随机变量  $\xi$  对应概率时,先求简单易求的复杂的最后用间接法.

二是结合统计图(表)考查,利用所求分布列、均值、方差等对实际问题作出判断、决策,此种考查方式是历年新课标理科卷解答题考查的重点、难点,如 16 年新课标 I 卷理科 19 题、17 年新课标 I 卷理科 19 题、18 年新课标理科 I 卷 20 题.解决此类题型,要加深对二项分布、超几何分布等不同模型的辨别与理解,如二项分布是有放回的抽样,每次试验事件 A 发生的概率是相同的;超几何分布是不放回的抽样,每次试验事件 A 发生的概率是不相同的.

**例 2** (2018 年高考新课标 I 卷理科第 20 题)某工厂的某种产品成箱包装,每箱 200 件,每一箱产品在交付用户之前要对产品作检验,如检验出不合格品,则更换为合格品.检验时,先从这箱产品中任取 20 件作检验,再根据检验结果决定是否对余下的所有产品作检验.设每件产品为不合格品的概率都为  $p$  ( $0 < p < 1$ ),且各件产品是否为不合格品相互独立.

(1)记 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为  $f(p)$ ,求  $f(p)$  的最大值点  $p_0$ .

(2)现对一箱产品检验了 20 件,结果恰有 2 件不合格品,以 (1) 中确定的  $p_0$  作为  $p$  的值.已知每件产品的检验费用为 2 元,若有不合格品进入用户手中,则工厂要对每件不合格品支付 25 元的赔偿费用.

(i)若不对该箱余下的产品作检验,这一箱产品的检验费用与赔偿费用的和记为  $X$ ,求  $EX$ ;

(ii)以检验费用与赔偿费用和的期望值为决策依据,是否该对这箱余下的所有产品作检验?

**解析** (1) 20 件产品中恰有 2 件不合格品的概率为  $f(p) = C_{20}^2 p^2 (1-p)^{18}$ , 因此  $f'(p) = C_{20}^2 [2p(1-p)^{18} - 18p^2(1-p)^{17}] = 2C_{20}^2 p(1-p)^{17}(1-10p)$ , 令  $f'(p) = 0$ , 则  $p = 0.1$ . 当  $p \in (0, 0.1)$  时,  $f'(p) > 0$ ,  $p \in (0.1, 1)$  时,  $f'(p) < 0$ , 所以  $f(p)$  的最大值点为  $p_0 = 0.1$ .

(2) (i) 由 (1)  $p = 0.1$ . 令  $y$  表示余下的 180 件产品中的不合格品件数,依题意  $Y \sim B(180, 0.1)$ , 所以  $X = 20 \times 2 + 25Y$ , 所以  $E(X) = E(40 + 25Y) = 40 + 25 \times 180 \times 0.1 = 490$ (元).

(ii) 如果对余下的产品作检验,则这一箱产品所需要的检验费为 400 元.由于  $E(X) > 400$ , 故应该对余下的产品作检验.

**评析** 此题以生产过程中抽检产品的实际问题为背景,考查了  $n$  次独立重复试验的概率、二项分布等知识点.此题的第一小问还涉及了利用导数求函数极值的内容.事实上,概率与统计中涉及其他知识,在这些年的高考中并不鲜见,如 2013 年全国 II 卷理 19(分段函数),2015 年全国 I 卷理 18(非线性回归、二次函数)等.在二轮复习中可以适度给出概率与统计和其他内容相结合的问题进行训练让学生感受和体验知识间的综合,但要保持适当的难度,毕竟主体是概率与统计而非函数.

#### 题型三 正态分布

表 4: 近三年正态分布考查情况表

| 年份   | 全国 I 卷 | 全国 II 卷 | 全国 III 卷 |
|------|--------|---------|----------|
| 2018 |        |         |          |
| 2017 | 理 19   |         |          |
| 2016 |        |         |          |

正态分布仅对理科生考查.主要有两类考查方式:

(1) 对正态分布符号本身的认识和图像的了解,考查正态分布的一些基本性质尤其是  $3\sigma$  原则的运用,如 2014 年全国 I 卷理科 18 题.

(2) 考查对  $3\sigma$  原则的理解,考查正态分布的综合问题,如 2017 年全国 I 卷理科 19 题,该题主要考查服从正态分布、二项分布的随机变量与期望及标准差等知识.对于第一小问,学生需要理解  $3\sigma$  原则,即服从于正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$  的随机变量通常只取  $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$  之间的值.只有理解这一原则,才能分析出题中的  $X$  服从二项分布,从而利用二项分布的概率、期望公式求解问题.

#### (二) 统计部分

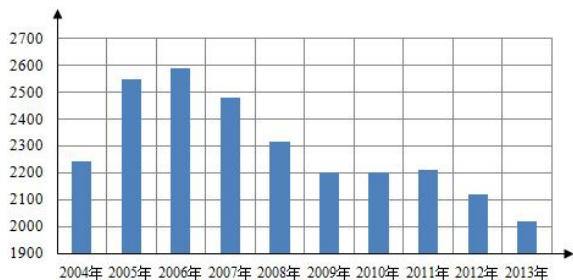
**题型四 抽样方式及简单识图应用**

近几年新课标卷立足于生产生活实际,主要以柱形图、折线图、扇形图等为载体,设计出很多贴近生活的设计图,从设计图出发作样本分析,以选择题的考查为主,难度不大,应注意生活中有关图表的认识,关键在于提高识图能力以及关注“边缘化知识”的复习,比如相关系数等.

表 5: 近三年抽样方式及简单识图应用考查情况表

| 年份   | 全国 I 卷    | 全国 II 卷 | 全国 III 卷  |
|------|-----------|---------|-----------|
| 2018 | 理 3 / 文 3 |         |           |
| 2017 | 文 2       |         | 理 3 / 文 3 |
| 2016 |           |         | 理 4 / 文 4 |

**例 3** (2015 年全国 II 卷理科第 3 题) 根据如图给出的 2004 年至 2013 年我国二氧化硫年排放量 (单位: 万吨) 柱形图, 以下结论中不正确的是 ( )



- A. 逐年比较, 2008 年减少二氧化硫排放量的效果最显著  
 B. 2007 年我国治理二氧化硫排放显现成效  
 C. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量呈减少趋势  
 D. 2006 年以来我国二氧化硫年排放量与年份正相关

**解析** A 项, 从图中明显看出 2008 年二氧化硫排放量比 2007 年的二氧化硫排放量明显减少, 且减少的最多, 故 A 正确; B 项, 2004 - 2006 年二氧化硫排放量越来越多, 从 2007 年开始二氧化硫排放量变少, 故 B 正确; C 项, 从 2006 年开始排放量总体呈逐渐下降趋势, 故 C 正确; D 项, 2006 年以来我国二氧化硫排放量与年份负相关. 故选 D 错误.

**题型五 样本数字特征的应用**

表 6: 近三年样本数字特征的应用考查情况表

| 年份   | 全国 I 卷        | 全国 II 卷 | 全国 III 卷 |
|------|---------------|---------|----------|
| 2018 | 文 19          |         | 文 18(1)  |
| 2017 | 文 2 / 文 19(2) |         |          |
| 2016 | 文 19(2)(3)    |         |          |

样本的数字特征的应用在文科解答题中是高频考点, 主要考查方式分两类:

一类是用样本估计总体, 主要以折线图、茎叶图、频率直方图、频数分布表等图表为载体, 考查学生“读”、“画”(绘制

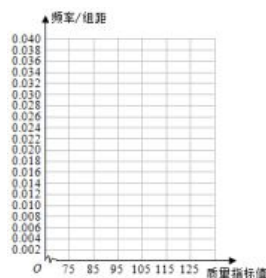
频率直方图、茎叶图)、“算”(能明明白白算出平均数、标准差、方差、中位数、众数等数字特征)

另一类是从样本中提取或计算重要数据, 如“三数”、标准差等, 进行说理.

**例 4** (2014 年全国 I 卷文科第 18 题) 从某企业生产的某种产品中抽取 100 件, 测量这些产品的一项质量指标值, 由测量表得如下频数分布表:

| 质量指标值分组 | [75, 85) | [85, 95) | [95, 105) | [105, 115) | [115, 125) |
|---------|----------|----------|-----------|------------|------------|
| 频数      | 6        | 26       | 38        | 22         | 8          |

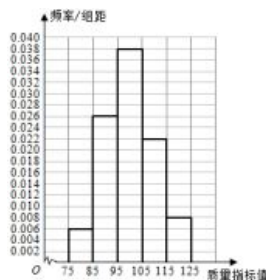
(1) 在答题卡上作出这些数据的频率分布直方图:



(2) 估计这种产品质量指标值的平均数及方差 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表);

(3) 根据以上抽样调查数据, 能否认为该企业生产的这种产品符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品的 80%”的规定?

**解析** (1) 这些数据的频率分布直方图如下:



(2) 质量指标值的样本平均数为

$$\bar{x} = \frac{80 \times 6 + 90 \times 26 + 100 \times 38 + 110 \times 22 + 120 \times 8}{100} = 100,$$

质量指标值的样本方差为  $s^2 = (-20)^2 \times 0.06 + (-10)^2 \times 0.26 + 0^2 \times 0.38 + 10^2 \times 0.22 + 20^2 \times 0.08 = 104$ . 所以, 这种产品质量指标的平均数估计值为 100, 方差的估计值 104.

(3) 依题意  $\frac{38 + 22 + 8}{100} = 68\% < 80\%$ , 所以该企业生产的这种产品不符合“质量指标值不低于 95 的产品至少要占全部产品的 80%”的规定.

**总结** 1. 频率直方图的绘制方法: (1) 求极差 (即一组数据中最大值与最小值的差); (2) 决定组距与组数; (3) 将数据

分组; (4) 列频率分布表; (5) 画频率分布直方图. 2. 频率分布直方图中的众数、中位数与平均数: ① 最高的小长方形底边中点的横坐标即是众数; ② 平分频率分布直方图的面积且垂直于横轴的直线与横轴交点的横坐标是中位数; ③ 平均数是频率分布直方图的“重心”, 等于频率分布直方图中每个小长方形的面积乘以小长方形底边中点的横坐标之和.

#### 题型六 回归分析及独立性检验的考查

表 7: 近三年回归分析及独立性检验考查情况表

| 年份   | 全国 I 卷  | 全国 II 卷     | 全国 III 卷  |
|------|---------|-------------|-----------|
| 2018 |         | 理 19*/文 18  | 文 18*     |
| 2017 | 文 19(1) | 文 19(2)(3)* |           |
| 2016 |         |             | 理 18/文 18 |

注: 带 \* 是考查独立性检验

线性相关问题和独立性检验都是新课标卷文科、理科解答题常考题型. 主要考查变量的相关关系、线性回归方程的求解、利用随机变量  $K^2$  来判断“两个分类变量有关系”.

##### (1) 线性相关问题

在复习时, 要注重体现、经历回归方程的思维分析过程. 根据散点图判断回归模型是线性还是非线性, 如果是线性则直接套公式, 如果是非线性, 则要通过数学变换将非线性关系转化为线性关系, 利用最小二乘估计求出线性回归方程系数, 求出线性回归方程, 再通过数学变换还原求出非线性回归方程 (如 2015 年高考新课标 I 文理科卷).

##### (2) 独立性检验解题思路:

- ① 根据样本数据制成  $2 \times 2$  列联表;
- ② 根据公式  $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$  计算  $K^2$  的观测值  $k$ ;
- ③ 比较  $k$  与临界值的大小关系, 作统计推断.

注意: 概率统计题的计算量比较大, 回归分析的题目一定要注意理解和用好公式, 用好所提供的数据, 有的时候, 所提供的公式与实际计算的公式存在差异, 这时需要利用最小二乘法的思想对公式进行适当变形. 如 2016 新课标 III 卷文科 18 题.

### 三、高三二轮复习备考建议

2013 年 -2018 年全国新课标 I 卷中概率统计部分试题都是中等偏难的试题, 是高考命题的一个重点、热点, 并且难度越来越大, 综合性较强, 对学生的数学核心素养提出了较高的要求. 建议在复习中要做好以下几点:

#### (1) 重拾教材, 加强基础

概率与统计内容主要集中在必修 3、选修 2-3. 而从近三年的全国卷来看, 很多考题取材源于教材但高于教材, 特别是填空题基本是教材中例题或习题的变式, 通过适当的改

造、拼接和组合而成, 解答题的题型也可以从教材中找到模板, 要充分发挥教材的导向作用. 因此, 在高三备考中要引导学生回归教材, 重视教材, 加强对基本概念、基本题型、基本方法的总结, 形成良好的建模思想.

概率与统计的解答题对文科生的答题书写提出了更高的要求. 如计算古典概型的概率时要列举出所有的基本事件, 不能遗漏或省略, 否则扣分, 有些考生往往就在此吃亏, 还有求概率时要有相应的文字说明作答, 用样本估计总体、用频率估计概率时要用大约、估计字眼等, 所以在二轮的复习中除了基本知识打牢, 也要规范学生的书写.

#### (2) 突出概率, 重视统计

明确概率问题的核心是概率计算, 概率计算的核心是清楚事件的互斥、对立、独立等关系. 排列组合是进行概率计算的工具, 二轮复习再次强调概率中的三个基本问题: 概率分布列、数学期望、方差, 对相互独立事件的概率、超几何分布、二项分布等题型要熟练掌握.

统计问题的核心是样本数据的收集和整理方法, 重点是频率分布直方图、茎叶图和样本的数字特征. 注意随机数模拟求概率, 随机数表法求概率的小题. 同时要学会概率与频率分布直方图、正态分布、独立性检验与线性回归方程知识的综合应用.

#### (3) 利用考题加强思维能力和运算能力的训练

在解题过程中要加强学生思维能力的训练. 全国卷概率与统计的解答题具有以能力为立意、综合性强、思维量大的特点, 并且实际背景新颖, 对推理分析能力的要求较高. 因此, 教师要充分利用课堂教学, 给学生充分的思维时间和空间, 培养学生的思维能力, 遇到新题型才能做到心中有数, 沉着应试.

同时, 概率与统计为数据处理提供了强有力的工具, 要培养学生数据分析、数据处理的能力. 通过统计图、统计表来读图、识图, 另外利用回归分析或独立性检验考查变量的相关关系, 这些都对学生的数据处理能力提出了更高的要求. 值得关注的是, 概率与统计渗透了函数的知识, 所以要通过高考真题、各地的模拟卷来加强学生的运算求解能力.

#### (4) 关注易错点, 想对策

在概率与统计板块的复习中, 要准确理解概念、特别要明确概率计算的核心是事件之间的关系, 统计问题的核心是样本数据的收集和整理, 即随机抽样和用样本估计总体. 易错点主要有: 套公式计算出错; 事件之间的关系理解不正确; 频率分布直方图、茎叶图的基本概念理解不清; 应用独立性检验方法解决问题时出现  $K^2$  值计算错误; 除此之外,

数列板块第二轮复习备考建议

广东省华南师范大学数学科学学院 (510631) 林艳冬

**摘要** 本文先以 2016—2018 年高考全国新课标 I 卷为研究对象, 分析文理科高考数列试题的命题规律与特点, 并提出相对应的高考备考建议; 评析了近 3 年全国 I、II、III 卷数列考点, 归纳总结出 6 类常考题型, 剖析命题特点, 希望对给位老师有所帮助.

**关键词** 高考; 数列; 备考建议

数列是高中数学的核心内容之一, 也是高考命题的热点之一, 新课标把数列放在了选择性必修的部分, 和以往注重对解题技巧的考查相比, 新课标更注重体现数列是特殊的函数的观点. 随着高考对数列题目的前移, 对数列的考查要求较低, 要强化通性通法的复习与训练, 不要加大数列难题的训练.

一、全国新课标 I 卷近三年高考考点及分析

为了更好的分析和把握近三年来我国高考中数列这一重点知识模块的考点, 笔者整理了下表;

表 1: 全国 I 卷文科近三年数列的考点

|     | 2018 年                           | 2017 年                                 | 2016 年                          |
|-----|----------------------------------|----------------------------------------|---------------------------------|
| 选择题 | * 第 4 题: 等差数列基本量                 | * 第 4 题: 等差数列基本量<br>* 第 12 题: 前 $n$ 项和 | * 第 3 题: 等差数列基本量                |
| 填空题 | * 第 14 题: 求数列的通项公式               |                                        | * 第 15 题: 等比数列基本量;<br>数列的单调性求最值 |
| 大题  | # 第 17 题: 递推公式应用;<br>求证等比; 求通项公式 | # 第 17 题: 求通项公式;<br>求前 $n$ 项和; 求证等差    | # 第 17 题: 求通项公式;<br>求前 $n$ 项和   |

理科生还存在较大的问题是二项分布、超几何分布分辨不清, 使用排列组合公式时出错. 所以教师在二轮复习时要做到以下几点:

- ① 提高学生的数学阅读能力;
- ② 提高对公式认识的深度;
- ③ 加强在教学中对事件分析, 让学生透彻理解事件之间的关系;
- ④ 让学生阅读课本, 加深对频率分布直方图、茎叶图基本概念的理解;
- ⑤ 加强对超几何分布与二项分布的理解与应用;

考点分析

**1. 题型与分值** 全国新课标 I 卷对数列的考查, 比较稳定. 近三年理科卷基本上为两小题, 分值 10 分, 近三年文科卷为一大题, 分值为 12 分. 通过表一, 我们不难发现数列是高考必考的内容, 但近三年来难度有所降低. 理科卷的其中一题在前四题的位置, 考察基本量的运算, 难度较简单, 另一题的考察较为灵活, 难度中等. 文科卷在第一道大题的位置, 难度中等偏易.

2. 主要考察的内容

近三年全国新课标 I 卷对数列主要考察的内容有: 等差数列与等比数列, 数列的通项公式, 数列前  $n$  项和, 数列的综合应用等.

① 等差数列与等比数列, 主要考察了等差和等比数列的概念、性质、通项公式、前  $n$  项和, 常考察基本量的运算, 证明或判断等差或等比数列, 运用数列是特殊函数这一性质解题. 着重考察了函数与方程的思想, 转化与化归的思想, 求解与运算的能力.

② 求数列的通项公式, 近三年全国新课标 I 卷对通项公式的考察主要集中在定义法、公式法、构造法, 难度较为简单, 需要强化通性通法的训练, 着重考察了分类讨论的思想, 推理论证的能力, 求解与运算的能力.

- ⑥ 加强排列组合数公式的应用, 让学生熟练掌握;
- ⑦ 加强对回归分析与独立性检验的基本思想的理解与应用.

参考文献

[1] 赵萍. 高中数学高效课堂·二轮复习精准备考·教师用书·文科 [M]. 广州: 广东高等教育出版社, 2018.12, (第八章).

[2] 赵萍. 高中数学高效课堂·二轮复习精准备考·教师用书·理科 [M]. 广州: 广东高等教育出版社, 2018.12, (第八章).

[3] 余小芬, 蒲霞露, 刘成龙. 2013 ~ 2018 年高考数学全国卷“概率与统计”专题分析 [J]. 中学数学, 2018(15):42-45.