例谈强基和联赛题中复数的应用

◉安徽省蚌埠第二中学　钟　铎　刘小树

摘要：复数在强基、联赛中考查较多.基础题多以选择题和填空题的形式出现，主要考查复数的性质；拔高题多以压轴题形式出现，考查学生分析解决问题的能力，需要运用或构造复数的代数、几何性质，同时运用必备的技巧才能解决问题.本文中对一些高校强基、各类竞赛中的经典试题进行分析，为研究复数并备考强基及各类竞赛的读者助力.

关键词：强基；联赛；共轭；几何意义；单位根；复数列

1 知识介绍

1.1 复数的四种形式

代数形式：$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$.

向量形式：$\overrightarrow{OZ}=(a,b)(a,b\in\mathbf{R})$.

三角形式：$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(a=r\cos\theta,b=r\sin\theta,|r|=\sqrt{a^2+b^2})$.

指数形式：$r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=r\exp(\mathrm{i}\theta)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

1.2 复数的常规运算

(1)复数的加、减、乘、除四则运算都遵循代数式的运算规则.涉及虚数单位i乘方的运算只需将$\mathrm{i}^2=-1$代入即可.复数加法、乘法运算满足交换律与结合律，复数的乘法对加法满足分配律.

(2)复数的乘方与开方运算主要用于求关于z的方程$z^n=z_0$的根.若$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$，$z_0=r_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$，$r,r_0$是正实数，$\theta,\theta_0\in\mathbf{R}$，则$z_k=\sqrt[n]{r_0}\,\mathrm{e}^{\frac{\theta_0-2k\pi}{n}\mathrm{i}}$，$k\in\mathbf{Z},0\leqslant k\leqslant n-1$.故$z_0$的$n$次方根有$n$个.

1.3 共轭复数的运算性质

复数$z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，共轭复数为$\bar{z}=a-b\mathrm{i}$.共轭复数有以下两组重要的代数运算性质：

(1)$\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}=\overline{z_1\cdot z_2}$，$\overline{z^n}=(\bar{z})^n(n\in\mathbf{Z})$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq0)$.

即共轭对于复数的和差积商运算没有先后顺序.这是解决问题时具有技巧性的性质.

(2)$z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$；$z-\bar{z}=2\mathrm{Im}(z)$；$z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$；$z\in\{b\mathrm{i}|b\in\mathbf{R}\}\Leftrightarrow\bar{z}+z=0$.

1.4 复数模的运算性质

以下两组重要运算性质小巧强悍，使用起来可以突破重大难题和压轴题的瓶颈.

(1)$|\bar{z}|=|z|$，$|z|^2=z\bar{z}$，$|z_1||z_2|=|z_1z_2|$，$|z^n|=|z|^n$，$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}(z_2\neq0)$.

即模运算对于积、商运算没有先后顺序.一个复数模的平方等于该复数与其共轭的乘积(化模为积形式).

(2)①$\max\{|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|\}\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$.

②$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$，此式即为复数的三角不等式，对多个复数也成立.

1.5 复数的单位根

方程$x^n-1=0(n\geqslant2,n\in\mathbf{N})$有$n$个互不相等的根$\varepsilon=\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}=\cos\frac{2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$，称为$n$次单位根.复平面内，$n$个$n$次单位根对应的点恰好是单位圆内接正$n$边形的顶点.设$\varepsilon_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}(k=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$，则$\varepsilon^k=\varepsilon_1^k$，$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^n+\cdots\cdots+x+1)=(x-1)\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x-\varepsilon_j)=0$，$1+\sum\limits_{j=1}^{n-1}x^j=\prod\limits_{j=1}^{n-1}(x-\varepsilon_j)$.

于是$|\varepsilon_k|=1$，$\varepsilon_j\varepsilon_k=\varepsilon_{j+k}$，$1+\varepsilon_1+\cdots\cdots+\varepsilon_{n-1}=0$，$1+\varepsilon_1^m+\varepsilon_2^m+\cdots\cdots+\varepsilon_{n-1}^m=\begin{cases}n,m|n,\\0,m\nmid n.\end{cases}$

复数单位根的性质在解决复数多项式问题等方面运用普遍.

1.6 复数的几何意义和曲线方程的复数表示

复数的常见几何意义：$|z_1-z_2|$表示复数z_1,z_2对应的点Z_1,Z_2之间的距离.利用复数的模可以表示一些常规的曲线方程.

圆的方程：$|z-z_0|=r(r>0)$.

线段垂直平分线方程：$|z-z_1|=|z-z_2|$.

椭圆的方程：$|z-z_1|+|z-z_2|=2a$(其中$2a>|z_1-z_2|,a\neq0$).

双曲线方程：$||z-z_1|-|z-z_2||=2a(2a<|z_1-z_2|,a>0)$.

2 应用举例

2.1 基本性质的运用

例1　(2022年北大强基)已知复数$z_1=5-x+(6-4y)\mathrm{i}$，$z_2=2+2x+(3-y)\mathrm{i}$，$z_3=3-x+(1+5y)\mathrm{i}$，当$|z_1|+|z_2|+|z_3|$取最小值时，$3x+6y=$______.

解析：由复数三角不等式，得$|z_1|+|z_2|+|z_3|\geqslant|z_1+z_2+z_3|=|5-x+(6-4y)\mathrm{i}+2+2x+(3-y)\mathrm{i}+3-x+(1+5y)\mathrm{i}|=|10+10\mathrm{i}|=10\sqrt{2}$，当且仅当$5-x=6-4y,2+2x=3-y,3-x=1+5y$，即$x=y=\frac{1}{3}$时

等号成立.

所以 $3x+6y=3$.

评注:求模的和的最小值时,联想复数三角不等式 $|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots\cdots+|z_n|$,将已知约束条件构造配凑成定值.

例2 (2022年清华强基)已知复数 z 满足 $|z|=1$,则 $|(z-2)(z+1)^2|$ 的最大值为______.

解析:$|(z-2)(z+1)^2|=|z-2||z+1|^2=\sqrt{|z-2|^2}\cdot(z+1)(\overline{z+1})=\sqrt{5-2(z+\overline{z})}\cdot[(z+\overline{z})+2]\leqslant\sqrt{\left(\frac{5-2(z+\overline{z})+(z+\overline{z})+2+(z+\overline{z})+2}{3}\right)^3}=3\sqrt{3}$,当且仅当 $z=\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 时,取到最大值 $3\sqrt{3}$.

评注:由求复数积的最大值联想到转化,使用均值不等式通过放缩凑得和为定值,把问题转化为 $\sqrt{[5-2(z+\overline{z})][(z+\overline{z})+2][(z+\overline{z})+2]}$,是破解的关键.

2.2 复数的几何意义

例3 (2022年北大强基)若复数 z 满足 $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{2}\right)\in[-1,1]$,$\mathrm{Im}\left(\frac{z}{2}\right)\in[-1,1]$,$\mathrm{Re}\left(\frac{2}{z}\right)\in[-1,1]$,$\mathrm{Im}\left(\frac{2}{z}\right)\in[-1,1]$,则 z 在复平面上形成轨迹的面积为______.

解析:设 $z=x+y\mathrm{i},x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}$,则 $\frac{z}{2}=\frac{x+y\mathrm{i}}{2}$,$\frac{2}{z}=\frac{2x-2y\mathrm{i}}{x^2+y^2}$,即

$$\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2,\\ -2\leqslant y\leqslant 2,\\ (x-1)^2+y^2\geqslant 1,\\ (x+1)^2+y^2\geqslant 1,\\ x^2+(y-1)^2\geqslant 1,\\ x^2+(y+1)^2\geqslant 1.\end{cases}$$

所以 z 在复平面上形成的轨迹面积为 $4\left(2\times 2-1-2\times\frac{\pi}{4}\right)=12-2\pi$.

评注:根据复数模的性质把约束条件转化为平面直角坐标系内的可行域是本题的突破口.该题为基础题.

例4 (2022年清华强基)已知复数 z_1 终点在 $1+\mathrm{i}$ 和 $1+a\mathrm{i}$ 表示两点连成的线段上移动,且 $|z_2|=1$,若 $z=z_1+z_2$ 在复平面内上表示的点围成的面积为 $\pi+4$,则 a 的值可能为______.

解析:设 $z_1=1+\lambda\mathrm{i}(\lambda\in\mathbf{R})$,$z_2=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,则若 $1\leqslant\lambda\leqslant a$ 时,$z_1+z_2=(1+\cos\theta)+(\lambda+\sin\theta)\mathrm{i}$ 表示以 $(1,\lambda)$ 为圆心,1为半径的圆,从而 $S=2(a-1)+\pi=\pi+4$,即 $a=3$.由对称性知,若 $\lambda<1$ 时,$a=-1$.

因此 a 的值可能为3或 -1.

评注:本题通过复数代数形式与三角形式的巧妙结合,将运动变化问题量化,最后由对称性得出两个值.

2.3 复数单位根的应用

例5 (2019年中国科学技术大学少年班创新班)设复数 $z=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,其中 $\theta=\frac{2\pi}{2019}$,则 $\sum\limits_{2019}z^k=$______.

解析:首先做素因数分解,得到 $2019=3\times 673$,则 $\sum\limits_{(k,2019)=1}^{2\,019}z^k=\sum\limits_{3\nmid k\text{且}673\nmid k}^{2\,019}z^k=\sum\limits_{k=1}^{2\,019}z^k-\sum\limits_{k=1}^{673}z^{3k}-\sum\limits_{k=1}^{2}z^{673k}$.由2 019次单位根的性质,$0=\sum\limits_{k=0}^{2\,018}z^k=\sum\limits_{k=1}^{2\,019}z^k$,$z^{2\,020}=z^{2\,019+1}=z$,得 $\sum\limits_{k=1}^{2\,020}z^k=\sum\limits_{k=1}^{2019}z^k+z=z$.由2 019次单位根的性质,令 $z^3=\varepsilon$,则 $\sum\limits_{k=1}^{673}z^{3k}=\sum\limits_{k=1}^{673}\varepsilon^k=0$.

由3次单位根的性质,令 $z^{673}=\eta$,则 $\sum\limits_{k=1}^{2}z^{673k}=\sum\limits_{k=1}^{2}\eta^k=-1$,因此 $\sum\limits_{(k,2\,019)=1}z^k=\sum\limits_{3\nmid k\text{且}673\nmid k}^{2\,019}z^k=\sum\limits_{k=1}^{2\,019}z^k-\sum\limits_{k=1}^{673}z^{3k}-\sum\limits_{k=1}^{2}z^{673k}=0-0-(-1)=1$.

评注:本题主要反复使用复数单位根的性质 $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\varepsilon^j=\sum\limits_{j=1}^{n}\varepsilon^j=0$.

2.4 复数的综合应用

例6 (2021年全国高中数学联合竞赛A卷)已知复数列 $\{z_n\}$ 满足:$z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$,$z_{n+1}=\overline{z_n}(1+z_n\mathrm{i})(n=1,2,\cdots\cdots)$,求 z_{2021} 的值.

解析:设 $z_n=x_n+y_n\mathrm{i},x_n,y_n\in\mathbf{R},n\in\mathbf{N}^*$,则

$$z_{n+1}=x_{n+1}+y_{n+1}\mathrm{i},x_1=\frac{\sqrt{3}}{2},y_1=0.$$

于是 $z_{n+1}=\overline{z_n}(1+z_n\mathrm{i})=\overline{z_n}\cdot z_n\mathrm{i}+\overline{z_n}=(x_n^2+y_n^2)\mathrm{i}+x_n-y_n\mathrm{i}=x_n+(x_n^2+y_n^2-y_n)\mathrm{i}$.

所以 $x_{n+1}=x_n,y_{n+1}=x_n^2+y_n^2-y_n$,即 $x_{n+1}=x_n=\frac{\sqrt{3}}{2},y_{n+1}=y_n^2-y_n+\frac{3}{4}$.

故 $y_{n+1}-\frac{1}{2}=y_n^2-y_n+\frac{1}{4}=\left(y_n-\frac{1}{2}\right)^2$,所以迭代当 $n\geqslant 2$,得 $y_n=\frac{1}{2}+\left(y_1-\frac{1}{2}\right)^{2^{n-1}}$,即 $y_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}$.于是 $z_n=x_n+y_n\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^{n-1}}}\right)\mathrm{i}$.

因此,$z_{2\,021}=x_{2\,021}+y_{2\,021}\mathrm{i}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2^{2\,020}}}\right)\mathrm{i}$.

评注:若要求复数列的通项公式,可预设复数代数形式,将复数列转化为实数列问题,然后运用实数列的递推求通项.

例7 (2021年全国高中数学联合竞赛A1卷)设 $a,b\in\mathbf{R}$.若关于 z 的方程 $(z^2+az+b)(z^2+az+2b)=0$ 有四个互不相等的复数根 z_1,z_2,z_3,z_4,且它们在复平面上对应的点恰是一个边长为1的正方形的四个顶点,求 $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$ 的值.

解析:设二次方程 $E_1:z^2+az+b=0$,$E_2:z^2+az+2b=0$.

不妨设 z_1,z_2 为 E_1 的解,z_3,z_4 为 E_2 的解.若 z_1,z_2,z_3,z_4 均为实数,则它们在复平面上对应的点均在实轴上,不合题意;若 z_1,z_2,z_3,z_4 均为虚数,则它们在复平面上对应的点均在直线 $\mathrm{Re}(z)=-\frac{a}{2}$ 上,不合题意.故 z_1,z_2,z_3,z_4 中有两个实数、两个虚数.这表明,方程 E_1,E_2 的判别式 a^2-4b 与 a^2-8b 异号,此时,$b>0$(若 $b\leqslant 0$,则 $a^2-4b\geqslant 0$ 且 $a^2-8b\geqslant 0$,矛盾).于是 $a^2-4b\geqslant 0$,$a^2-8b<0$,从而 $z_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$,$z_{3,4}=\frac{-a\pm\sqrt{8b-4a^2}\,\mathrm{i}}{2}$.

显然 $\frac{z_1+z_2}{2}=\frac{z_3+z_4}{2}=-\frac{a}{2}$.由正方形的边长为1,知 $|z_1-z_2|=\sqrt{a^2-4b}=\sqrt{2}$,$|z_3-z_4|=\sqrt{8b-a^2}=\sqrt{2}$,则 $a^2-4b=2$,$a^2-8b=-2$,即 $a^2=6$,$b=1$.注意到 z_1,z_2 同号及 $|z_3|=|z_4|$,故 $|z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|=|z_1+z_2|+2|z_3|=|-a|+\sqrt{a^2+(8b-a)^2}=\sqrt{6}+2\sqrt{2}$.

评注:确定四个复数的模,需要确定复平面上复数的位置,通过分析转化为一元二次方程根的问题,进而达到目的.

例8 (2019年全国高中数学联赛)称一个复数列 $\{z_n\}$ 为“有趣的”:若 $|z_1|=1$,且对于任意正整数 n,均有 $4z_{n+1}^2+2z_nz_{n+1}+z_n^2=0$.求最大的常数 C,使得对于一切有趣的数列 $\{z_n\}$ 及任意正整数 m,均有 $|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_m|\geqslant C$.

分析:联赛中命题经常为这个类型,如“有趣的”“好点”“好数”等,主要表达所求问题的特点.本题中寻找比 $|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_m|$ 小的最大的实数 C,显然容易联想到复数模不等式,先放缩,再结合等比数列求和的极限思想找到 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,最后求 S_{2p+1} 的极限.仔细琢磨会发现,这种推理的逻辑具有高等数学数列极限的思想.因此,联赛中和数列有关问题的考查总有高等数学的影子.于是考虑有趣数列 $\{z_n\}$,归纳可知 $z_n\neq 0(n\in\mathbf{N}^*)$.

解析:由条件得 $4\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)^2+2\cdot\frac{z_{n+1}}{z_n}+1=0$,从而 $\frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}$,则 $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\left|\frac{-1\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\right|=\frac{1}{2}$.

于是 $|z_n|=|z_1|\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}(n\in\mathbf{N}^*)$.

故 $|z_n+z_{n+1}|=|z_n|\left|1+\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|=\frac{1}{2^{n-1}}\left|\frac{3\pm\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{4}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

令 $S_m=|z_1+z_2+\cdots\cdots+z_m|(m\in\mathbf{N}^*)$.

当 $m=2p(p\in\mathbf{N}^*)$ 时,则 $S_m\geqslant|z_1+z_2|-\sum\limits_{k=2}^{p}|z_{2k-1}+z_{2k}|>\frac{\sqrt{3}}{2}-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $m=2p+1(p\in\mathbf{N}^*)$ 时,则 $|z_{2p+1}|=\frac{1}{2^{2p}}<\frac{\sqrt{3}}{3\times 2^{2p-1}}=\sum\limits_{k=p+1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{2^{2k-1}}=\sum\limits_{k=p+1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|$.

故 $S_m\geqslant|z_1+z_2|-\sum\limits_{k=2}^{p}|z_{2k-1}+z_{2k}|-|z_{2p+1}|>\frac{\sqrt{3}}{2}-\sum\limits_{k=p+1}^{\infty}|z_{2k-1}+z_{2k}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

当 $m=1$ 时,$S_1=|z_1|=1>\frac{\sqrt{3}}{3}$.

以上表明 $C=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 满足要求.

又当 $z_1=1$,$z_{2k}=\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2^{2k}}$,$z_{2k+1}=\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2^{2k+1}}$ $(k\in\mathbf{N}^*)$ 时,可知 $\{z_n\}$ 为有趣数列.

此时

$$\begin{aligned}&\lim_{p\to\infty}S_{2p+1}\\&=\lim_{p\to\infty}\left|z_1+\sum_{k=1}^{p}z_{2k}+z_{2k+1}\right|\\&=\lim_{p\to\infty}\left|z_1+\sum_{k=1}^{p}\frac{-3-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2^{2k+1}}\right|\\&=\left|1+\frac{-3+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{8}\cdot\frac{4}{3}\right|\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}.\end{aligned}$$

这表明,C 不能大于 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

综上,所求的 C 为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

评注:本题根据齐次方程求得通项,而对于复数列主要转化到模,利用模的性质再放缩转化为实数列问题.

3 综述

复数是中学数学学习中的一个重难点知识,高考对复数的考查相对基础,这为强基、竞赛留下了更大的命题空间,同时也是诸多考生的短板.由于复数为类似平面向量的工具,故兼有代数和几何的特点,复数知识的技巧性和应用性极其广泛.近几年在各类强基、竞赛中逐渐成为热点,在联赛、冬令营、国家集训队题中都有渗透,常常作为压轴题.复数本身具备良好的运算性质,所以复数法兼具有解析法、三角法的优势.因此参加数学竞赛的选手,不仅要熟悉并掌握复数的基本知识和解题技巧,还要学会将复数作为强有力的工具应用于问题的解决中,同时还要具备高等数学的思想,这样在具体解答过程中,才能游刃有余.Z