

解析复数问题的常见考点

■牛 娇

复数是每年高考的必考内容之一,复数的主要考点有:复数的概念,复数的运算以及复数的几何意义。下面就复数的常见考点进行解析。

考点 1:复数的有关概念

求一个复数的实部与虚部,可将已知复数化为代数形式 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$,则该复数的实部为 a ,虚部为 b ;求一个复数的共轭复数,只需将此复数整理成标准的代数形式,实部不变,虚部变为相反数,即得原复数的共轭复数,复数 $z_1 = a + bi$ 与 $z_2 = c + di$ 共轭 $\Leftrightarrow a = c, b = -d (a, b, c, d \in \mathbf{R})$ 。

例 1 (1)复数 $\frac{1}{1-3i}$ 的虚部是()。

- A. $-\frac{3}{10}$ B. $-\frac{1}{10}$
C. $\frac{1}{10}$ D. $\frac{3}{10}$

(2)已知 $a \in \mathbf{R}$,若 $a-1+(a-2)i$ (i 为虚数单位)是实数,则 $a = ()$ 。

- A. 1 B. -1
C. 2 D. -2

解: (1) 因为 $\frac{1}{1-3i} = \frac{1+3i}{(1+3i)(1-3i)} = \frac{1+3i}{10} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$, 所以虚部为 $\frac{3}{10}$ 。应选 D。

(2) 因为 $a-1+(a-2)i$ 是实数,所以 $a-2=0$, 所以 $a=2$ 。应选 C。

跟踪训练 1: (1)已知 $a+bi (a, b \in \mathbf{R})$ 是 $\frac{1-i}{1+i}$ 的共轭复数,则 $a+b$ 等于()。

- A. -1 B. $-\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{2}$ D. 1

(2)若 $z=1+i$, 则 $|z^2-2z| = ()$ 。

- A. 0 B. 1
C. $\sqrt{2}$ D. 2

提示: (1) 由 $\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = -i$,

可得 $a+bi=i$ 。由复数相等得 $a=0, b=1$, 所以 $a+b=1$ 。应选 D。

(2) (方法 1) 由 $z=1+i$, 可得 $|z^2-2z| = |(1+i)^2-2(1+i)| = |2i-2i-2| = |-2| = 2$ 。应选 D。

(方法 2) 由 $z=1+i$, 可得 $|z^2-2z| = |z||z-2| = \sqrt{2} \times |-1+i| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ 。应选 D。

考点 2:复数的四则运算

复数代数形式运算问题的解题策略:在进行复数的加减法运算时,可类比合并同类项,运用法则(实部与实部相加减,虚部与虚部相加减)计算即可;复数的乘法类似于多项式的四则运算,可将含有虚数单位 i 的项看作一类同类项,不含 i 的项看作另一类同类项,分别合并即可;复数除法的关键是分子分母同乘以分母的共轭复数,解题中要注意把 i 的幂写成最简形式。

例 2 (1)已知 $z=2-i$, 则 $z(\bar{z}+i) = ()$ 。

- A. $6-2i$ B. $4-2i$
C. $6+2i$ D. $4+2i$

(2)已知 $(1-i)^2 z = 3+2i$, 则 $z = ()$ 。

- A. $-1-\frac{3}{2}i$ B. $-1+\frac{3}{2}i$
C. $-\frac{3}{2}+i$ D. $-\frac{3}{2}-i$

解:(1)因为 $z = 2 - i$, 所以 $z(\bar{z} + i) = (2 - i)(2 + 2i) = 6 + 2i$. 应选 C.

(2)由已知条件得 $z = \frac{3+2i}{(1-i)^2} = \frac{3+2i}{-2i} = \frac{3i-2}{2} = -1 + \frac{3}{2}i$. 应选 B.

跟踪训练 2:(1)设 $2(z + \bar{z}) + 3(z - \bar{z}) = 4 + 6i$, 则 $z = (\quad)$.

- A. $1 - 2i$ B. $1 + 2i$
C. $1 + i$ D. $1 - i$

(2)(多选题)对于两个复数 $\alpha = 1 - i, \beta = 1 + i$, 下列四个结论中正确的是($\quad$).

- A. $\alpha\beta = 1$ B. $\frac{\alpha}{\beta} = -i$
C. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = 1$ D. $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

提示:(1)设 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R})$, 则 $\bar{z} = a - bi$, 代入 $2(z + \bar{z}) + 3(z - \bar{z}) = 4 + 6i$, 可得 $4a + 6bi = 4 + 6i$, 所以 $a = 1, b = 1$, 所以 $z = 1 + i$. 应选 C.

(2)由 $\alpha = 1 - i, \beta = 1 + i$, 可得 $\alpha\beta = (1 - i)(1 + i) = 2$, A 不正确. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i$, B 正确. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = |-i| = 1$, C 正确. $\alpha^2 + \beta^2 = (1-i)^2 + (1+i)^2 = 1 - 2i - 1 + 1 + 2i - 1 = 0$, D 正确. 应选 BCD.

考点 3: 复数的几何意义

复数 z 、复平面上的点 Z 及向量 $\overrightarrow{OZ}$ 相互联系, 即 $z = a + bi (a, b \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow Z(a, b) \Leftrightarrow \overrightarrow{OZ} = (a, b)$. 由于复数、点、向量之间建立了一一对应关系, 因此可把复数、向量与解析几何联系在一起, 解题时可运用数形结合的方法, 使问题的解决更加直观. $|z|$ 的几何意义: 令 $z = x + yi (x, y \in \mathbf{R})$, 则 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, 由此可知表示复数 z 的点到原点的距离就是 $|z|$ 的几何意义; $|z_1 - z_2|$ 的几何意义是复平面内表示复数 z_1, z_2 的两点之间的距离.

例 3 (1)复数 $\frac{2-i}{1-i}$ 在复平面内对应的点所在的象限为($\quad$).

- A. 第一象限 B. 第二象限

- C. 第三象限 D. 第四象限

(2)在复平面内, 复数 $\frac{a+i}{1+i}$ 对应的点位于直线 $y = x$ 的左上方, 则实数 a 的取值范围是($\quad$).

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(-\infty, 1)$
C. $(0, +\infty)$ D. $(1, +\infty)$

解:(1)因为 $\frac{2-i}{1-i} = \frac{(2-i)(1+i)}{1-i} = \frac{5+5i}{10} = \frac{1+i}{2}$, 所以该复数对应的点为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 该点在第一象限. 应选 A.

(2)因为复数 $\frac{a+i}{1+i} = \frac{(a+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{(a+1) + (1-a)i}{2}$, 又复数 $\frac{a+i}{1+i}$ 对应的点 $(\frac{a+1}{2}, \frac{1-a}{2})$ 在直线 $y = x$ 的左上方, 所以 $\frac{1-a}{2} > \frac{1+a}{2}$, 解得 $a < 0$, 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 0)$. 应选 A.

跟踪训练 3:(1)在复平面内, 复数 $\frac{2i}{1+i}$ 对应点的坐标为($\quad$).

- A. $(-1, 1)$ B. $(1, -1)$
C. $(-1, i)$ D. $(i, -1)$

(2)设复数 z 满足 $|z-1| = |z-i|$ (i 为虚数单位), z 在复平面内对应的点为 (x, y) , 则($\quad$).

- A. $y = -x$
B. $y = x$
C. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$
D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$

提示:(1)因为 $\frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i+2i^2}{2} = -1+i$, 所以复数 $\frac{2i}{1-i}$ 对应点的坐标是 $(-1, 1)$. 应选 A.

(2)由 z 在复平面内对应的点为 (x, y) , 可得 $z = x + yi (x, y \in \mathbf{R})$. 因为 $|z-1| = |z-i|$, 所以 $(x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$, 所以 $y = x$. 应选 B.

作者单位: 安徽省阜阳市颍上县颍上一中
(责任编辑 郭正华)