如何求解生活中的表面积与体积问题

汤春娣

空间几何体的表面积与体积问题是高考中常见的考点，也是生活中的常见问题.它涉及相关几何体的特征与性质、平面几何知识、表面积或全面积、体积以及相关的数值关系等问题. 解答空间几何体问题的关键是能从生活实际中观察对应的简单几何体，运用对应的公式计算简单几何体或组合图形的表面积与体积，并用来解答一些实际问题.

一、柱体的表面积与体积问题

例 1.将两个完全相同的长方体拼在一起，如果能组成一个正方体，则表面积减少的百分比为______.

解析：同学们可以利用拼接前后长方体与正方体的几何特征与位置关系，分析长方体棱长的变化情况，并确定表面积的变化情况.

解：设长方体较短的棱长为 1，则长方体的表面积为 $1\times2\times4+2\times2\times2=16$，正方体的表面积为 $2\times2\times6=24$，所以 $(16\times2-24)\div(16\times2)=25\%$，故本题的答案为 25%.

解答该创新问题的关键是巧妙处理拼接前后长方体与正方体的关系，分析相互之间的几何特征，并建立相应棱长之间的关系.对于组合体的拼接问题，我们首先应进行正确的分割或补形，使之成为几个简单的多面体，建立相互之间的等量关系，再利用相应的关系对相关量进行求解.

二、锥体的表面积与体积问题

例 2.如图 1 所示是一个建筑物的三视图，现需要将其外壁用油漆刷一遍，已知每平方米用油漆 0.2kg，问共需油漆多少 kg？（尺寸如图所示，单位：m，π 取 3.14，结果精确到 0.01 kg）

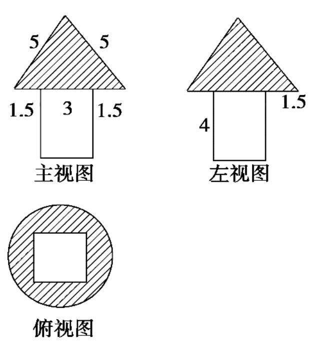

图 1

解析：我们根据三视图确定组合体的特征，利用圆锥和四棱柱的表面积公式确定对应的表面积，进而解答实际应用问题.

解：由图知，建筑物自上而下分别是圆锥和四棱柱的组合体，并且圆锥的底面半径为 3m、母线长为 5m，四棱柱的高为 4m，底面是边长为 3m 的正方形，圆锥的表面积为 $\pi r^2+\pi rl=3.14\times3^2+3.14\times3\times5=28.26+47.1=75.36\text{m}^2$；四棱柱的一个底面积为 $3^2=9\text{m}^2$，所以建筑物的外壁面积 $=75.36-9+48=114.36\text{m}^2$，所以需要油漆 $114.36\times0.2=22.872\approx22.87\text{kg}$.

本小题主要考查了圆锥和棱柱的表面积、三视图及其应用，还考查了同学们的阅读理解能力、空间想象能力以及运算能力. 利用三视图确定组合体的形状是一大常见考点.将三视图与实际应用问题相结合，达到考查同学们的应用能力的目的.

三、台体的表面积与体积问题

例 3.我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题：在下雨时，用一个圆台形的天池盆接雨水.天池盆盆口的直径为二尺八寸，盆底直径为一尺二寸，盆深一尺八寸.若盆中积水深九寸，则平地的降雨量是______寸.（注：①平地的降雨量等于盆中积水的体积除以盆口面积；②一尺等于十寸.）

解析：同学们可以先根据题目条件确定圆台的上、下底半径与高，结合盆中积水深计算对应的水平面所在圆的半径，再利用圆台的体积公式求解相应的体积，然后将其除以盆口面积即为平地降雨量.

解：由题知该圆台的上、下底面半径分别为 $R=14$ 寸，$r=6$ 寸，高为 $h=18$ 寸，而盆中积水深 $h_1=9$ 寸，此时对应的水平面所在圆的半径为 $r_1=\frac{R+r}{2}=10$ 寸，则天池盆中水的体积为 $V=\frac{1}{3}\pi h_1(r_1^2+r_1r+r^2)=588\pi$，而上底面圆的面积为 $S=\pi R^2=196\pi$，则平地降雨量为 $\frac{V}{S}=3$ 寸，故该题的答案为 3.

本小题主要考查了梯形的性质、圆台的体积以及同学们的阅读理解能力、空间想象能力、运算能力.求立体几何中体积问题的关键是找出合适的底以及相应的底面上的高（便于求解），它体现了通题通解、淡化技巧的原则.

四、球体的表面积与体积问题

例 4.如图 2 所示，一个圆锥形的空杯子上放着一个直径为 8 cm 的半球形的冰淇凌，请你设计一种这样的圆锥形杯子（杯口直径等于半球形的冰淇凌的直径，杯子壁厚忽略不计），使冰淇凌融化后不会溢出杯子，怎样设计最省材料？

解析：本题是一道实际应用问题.要使冰淇凌融化后不会溢出杯子，则必须 $V_{\text{圆锥}}\geqslant V_{\text{半球}}$.我们需分析圆锥与半球的体积来求解.

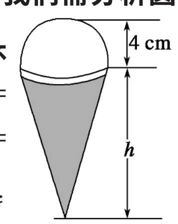

图 2

解：要使冰淇凌融化后不会溢出杯子，则必须 $V_{\text{圆锥}}\geqslant V_{\text{半球}}$，而 $V_{\text{半球}}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times4^3$，$V_{\text{圆锥}}=\frac{1}{3}sh=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times4^2\times h$，依题意：$\frac{1}{3}\pi\times4^2\times h\geqslant\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi\times4^3$，解得 $h\geqslant8$，即当圆锥形杯子的杯口直径为 8cm、高大于或等于 8cm 时，冰淇凌融化后不会溢出杯子，因为 $S_{\text{圆锥侧}}=\pi rl=\pi r\sqrt{h^2+r^2}$，当圆锥高取最小值 8 时，$S_{\text{圆锥侧}}$最小，所以当高为 8cm 时，制造的杯子最省材料.

我们把实际问题转化为求解相应的圆锥与半球的体积的大小比较问题，利用对应的体积公式来解答.解答此类问题的关键是正确分析题目中的体积与对应的图形之间的关系，加以转化.要求同学们在运用转化思想解题的过程中，充分发挥空间想象能力.

空间几何体的表面积与体积问题的考查形式多样，要求同学们具备较强的空间想象能力. 空间几何体的表面积与体积问题与实际生活联系密切，可以很好地培养同学们应用数学知识的意识，提高将生活中的具体问题转化为数学问题的能力.

（作者单位 江苏省启东市第一中学）