

# 立体几何中的切接截问题

■湖南省郴州市第二中学 陈鹏辉

简单几何体的面积与体积是必修教材的一节内容,在高考中也常以选择题或填空题的形式出现,以平面截几何体的截面问题和几何体的外接球、内切球问题为载体,考查同学们的直观想象和数学运算等核心素养。

## 一、补形法求棱锥的外接球半径

**例 1** 如图 1,在边长为 2 的正方形  $ABCD$  中, $E, F, G$  分别为  $BC, CD, BE$  的中点,沿  $AE, AF, EF$  把这个正方形折起,使得  $B, C, D$  三点重合于  $S$ ,得到三棱锥  $S-AEF$ ,如图 2 所示。求过点  $G$  的平面截三棱锥  $S-AEF$  的外接球所得截面圆的面积的取值范围。

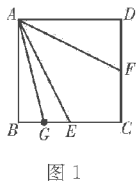


图 1

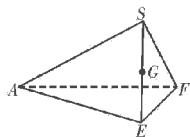


图 2

**解析:** 由题意知  $SA, SE, SF$  两两垂直,将其补成长方体  $SQ$ ,如图 3 所示,对角线  $SQ = \sqrt{SA^2 + SE^2 + SF^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$ ,所以外接

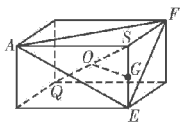


图 3

球的半径  $R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

因为三棱锥  $S-AEF$  的外接球的球心  $O$  为长方体  $SQ$  的中心,即对角线  $SQ$  的中点,

所以  $OG = \frac{1}{2}AF = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 。

参考图 4,当  $OG$  垂直截面时,截面圆的半径  $r = \sqrt{R^2 - OG^2} = \frac{1}{2}$ ,此时截面圆的面积取最小值  $\frac{\pi}{4}$ ;当

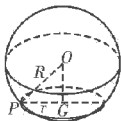


图 4

截面圆经过球心  $O$  时,截面圆的半径  $r = R = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,此时截面圆的面积取最大值  $\frac{3\pi}{2}$ 。故截面圆的面积的取值范围是  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 。

**小结:** 有公共点且两两垂直的三条棱的三棱锥和相对的棱长分别相等的三棱锥均可补

成长方体,直接求外接球的半径,不必找球心。

## 二、先定球心再求半径的解法

**例 2** 已知三棱锥  $A-BCD$  中,底面  $BCD$  是边长为  $2\sqrt{3}$  的正三角形,侧面  $ABD \perp$  底面  $BCD$ ,且  $AB = AD = 2$ ,则该几何体的外接球的表面积为\_\_\_\_\_。

**解析:** 如图 5,设  $BD$  的中点为  $E$ ,连接  $AE, CE$ 。因为  $AB = AD$ ,所以  $AE \perp BD$ 。同理  $CE \perp BD$ 。所以  $\angle AEC$  是二面角  $A-BD-C$  的平面角。

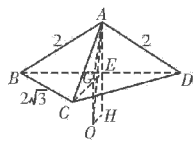


图 5

由侧面  $ABD \perp$  底面  $BCD$ ,得  $\angle AEC = 90^\circ, AE \perp CE$ 。又  $AE \cap CE = E$ ,所以  $BD \perp$  平面  $ACE$ 。又  $BD \subset$  平面  $ABD$ ,故平面  $ABD \perp$  平面  $ACE$ 。同理平面  $CBD \perp$  平面  $ACE$ 。

设底面等边  $\triangle BCD$  的外心为  $G$ ,则  $G$  在  $CE$  上,过  $G$  作平面  $CBD$  的垂线  $m$ ,则  $m$  上各点与点  $C, B, D$  等距,且  $m$  在平面  $ACE$  内;设侧面  $\triangle ABD$  的外心为  $H$ ,则  $H$  在  $AE$  上,过点  $H$  作平面  $ABD$  的垂线  $n$ ,则  $n$  上各点与点  $A, B, D$  等距,且  $n$  也在平面  $ACE$  内。所以  $m, n$  必交于一点  $O$ ,且点  $O$  与点  $A, B, C, D$  等距,故  $O$  为三棱锥  $A-BCD$  的外接球的球心。

在等边  $\triangle BCD$  中,  $GE = \frac{1}{3}CE = \frac{1}{3} \sqrt{BC^2 - BE^2} = 1$ ;在  $\triangle ABD$  中,  $\cos \angle ABE = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,所以  $\angle ABE = \frac{\pi}{6}$ 。

由正弦定理知  $\triangle ABD$  的外接圆的直径  $2r = \frac{AD}{\sin \angle ABE} = 4$ ,所以  $HA = r = 2$ 。

在矩形  $EGOH$  中,  $OH = GE = 1$ ,所以三棱锥  $A-BCD$  的外接球的半径  $R = OA = \sqrt{OH^2 + HA^2} = \sqrt{5}$ ,所以外接球的表面积为  $4\pi R^2 = 20\pi$ 。

**小结:** 当三棱锥的两个面是有公共底边

的等腰三角形时,这两个三角形所在平面的经过其外心的垂线的交点就是三棱锥的外接球的球心,结合三角形的外接圆的半径解三角形可得外接球的半径。

### 三、等体积法或利用相似三角形求多面体的内切球的半径

**例 3** 已知三棱锥  $A-BCD$  的棱长均为 6,其内有  $n$  个小球,球  $O_1$  与三棱锥  $A-BCD$  的四个面都相切,球  $O_2$  与三棱锥  $A-BCD$  的三个面和球  $O_1$  都相切, $\dots$ ,如此类推,球  $O_n$  与三棱锥  $A-BCD$  的三个面和球  $O_{n-1}$  都相切( $n \geq 2$ ,且  $n \in \mathbf{N}^*$ ),则球  $O_1$  的体积为\_\_\_\_,球  $O_n$  的表面积为\_\_\_\_。

**解析:** 设球  $O_n$  的半径为  $r_n$ ,等边  $\triangle BCD$  的中心为  $O$ ,  $CD$  的中点为  $M$ ,则  $BM = AM = \frac{\sqrt{3}}{2} BC = 3\sqrt{3}$ ,  $OM = \frac{1}{3} BM = \sqrt{3}$ ,  $AO = \sqrt{AM^2 - OM^2} = 2\sqrt{6}$ 。

解法一(利用相似三角形):如图 6,设球  $O_1$  与  $AM$  相切于点  $N$ ,则  $\triangle ANO_1 \sim \triangle AOM$ ,所以  $\frac{O_1N}{MO} = \frac{AO_1}{AM}$ ,即

$$\frac{r_1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6} - r_1}{3\sqrt{3}}, \text{解得 } r_1 = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

所以球  $O_1$  的体积  $V = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \sqrt{6}\pi$ 。

在  $\text{Rt}\triangle AOM$  中,  $\sin \angle MAO = \frac{OM}{AM} = \frac{1}{3}$ ,因为球  $O_n$  与球  $O_{n-1}$  相切,故  $\frac{r_{n-1} - r_n}{r_{n-1} + r_n} = \frac{1}{3}$ ,化简得  $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{2}$  为常数,所以  $\{r_n\}$  是公比为  $\frac{1}{2}$  的等比数列,  $r_n = r_1 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{\sqrt{6}}{2^n}$ ,所以球  $O_n$  的表面积为  $S = 4\pi r_n^2 = \frac{6\pi}{4^{n-1}}$ 。

解法二(等体积法):设三棱锥  $A-BCD$  的表面积为  $S$ ,则  $V_{\text{三棱锥 } A-BCD} = \frac{1}{3} S r_1 = \frac{1}{3} S_{\triangle BCD} \cdot AO$ ,又  $S = 4S_{\triangle BCD}$ ,所以  $r_1 = \frac{1}{4} AO = \frac{\sqrt{6}}{2}$ ,故球  $O_1$  的体积  $V = \frac{4}{3}\pi r_1^3 = \sqrt{6}\pi$ 。

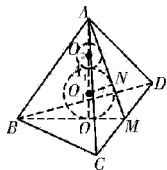


图 6

设球  $O_n$  与球  $O_{n-1}$  相切于点  $A_{n-1}$ ,则  $r_1 = \frac{1}{4} AO$ ,  $AA_1 = AO - 2r_1$ ,同理  $r_2 = \frac{1}{4} AA_1 = \frac{1}{4} (AO - 2r_1) = \frac{1}{2} r_1$ ,如此类推,  $AA_2 = AO - 2r_1 - 2r_2$ ,所以  $r_3 = \frac{1}{4} AA_2 = \frac{1}{4} (AO - 2r_1 - 2r_2)$ ,  $\dots$ ,  $r_{n-1} = \frac{1}{4} (AO - 2r_1 - 2r_2 - \dots - 2r_{n-2})$ ,  $r_n = \frac{1}{4} (AO - 2r_1 - 2r_2 - \dots - 2r_{n-1})$ 。将最后两式相减得,  $r_n - r_{n-1} = -\frac{1}{2} r_{n-1}$ ,即  $\frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{1}{2}$  为常数,以下同解法一。

**小结:** 类比用等面积法求三角形的内切圆的半径,可用等体积法求多面体的内切球的半径。正四面体的内切球的半径等于高的四分之一,外接球的半径等于高的四分之三。求内切球的半径还可利用直线与圆相切、相似三角形的相关知识求解。对于系列球的半径问题用到了等比数列的通项等代数知识。

### 四、几何法与坐标法求解多面体的截面问题

**例 4** 如图 7,已知长方体  $AC_1$  中,  $AB = AD = 4$ ,  $AA_1 = 3$ ,点  $E$  在棱  $A_1B_1$  上,  $A_1E = 3$ ,过点  $E$  作平面  $\alpha$  与  $A_1C$  垂直,求平面  $\alpha$  截长方体  $AC_1$  所得多边形的周长和截得的两部分几何体中较小部分的体积。

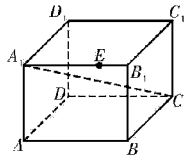


图 7

**解法一(几何法):**如图 8,连接  $A_1C_1$ 。设平面  $\alpha$  截上底面得线段  $EH$ ,因为  $A_1C \perp$  平面  $\alpha$ ,  $EH \subset$  平面  $\alpha$ ,所以  $A_1C \perp EH$ 。在长方体  $AC_1$  中,  $CC_1 \perp EH$ ,且  $A_1C \cap C_1C = C$ ,所以  $EH \perp$  平面  $A_1C_1CA$ 。又  $A_1C_1 \subset$  平面  $A_1C_1CA$ ,于是  $EH \perp A_1C_1$ 。

设平面  $\alpha$  截侧面  $ABB_1A_1$  得线段  $EF$ ,同理可证  $EF \perp A_1B$ 。

设平面  $\alpha$  截侧面  $ADD_1A_1$  得线段  $HG$ ,同理可证  $HG \perp A_1D$ 。

连接  $FG$ ,则  $FG \parallel EH$ ,即平面  $\alpha$  截长方

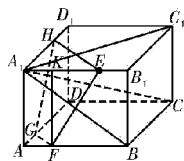


图 8



# 立体几何新题型例析

江苏省天一中学 孙承辉

立体几何解答题通常是一证一算,证明题主要考查空间中平行和垂直关系的证明,计算题主要是求空间中的夹角和距离。在近几年的高考和模拟考试中,出现了一些立体几何新题型,更加灵活地考查同学们的空间想象能力和计算能力。本文归纳了几类新题型,希望对同学们的复习迎考能有所帮助。

## 题型一、根据空间角确定点的位置

这类题目通常已知空间角的大小或空间角的某个三角函数值,需要同学们确定几何体中某个点的位置或者某条线段的长度。解

体  $AC_1$  得梯形  $EFGH$ 。因为  $AB=AD=4$ ,  $A_1E=3$ , 所以  $EH=\frac{3}{4}B_1D_1=3\sqrt{2}$ 。

在侧面  $A_1ABB_1$  中,作  $FK\perp A_1B_1$  于  $K$ , 则  $\angle EFK=\angle A_1BA$ ,  $\frac{FK}{FE}=\frac{AB}{A_1B}$ , 即  $\frac{3}{EF}=\frac{4}{5}$ , 得  $EF=\frac{15}{4}$ 。由勾股定理得  $EK=\frac{9}{4}$ , 所以  $AF=A_1E-KE=\frac{3}{4}$ 。由对称性得  $HG=\frac{15}{4}$ ,  $AG=AF=\frac{3}{4}$ , 所以  $FG=\sqrt{2}AF=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 。

因此,平面  $\alpha$  截长方体  $AC_1$  所得多边形  $EFGH$  的周长为  $\frac{15}{4}(2+\sqrt{2})$ 。

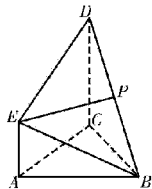
因为  $S'=S_{\triangle AGF}=\frac{1}{2}AF^2=\frac{9}{32}$ ,  $S=S_{\triangle A_1HF}=\frac{1}{2}A_1E^2=\frac{9}{2}$ , 所以  $V=\frac{1}{3}h(S'+\sqrt{S'S}+S)=\frac{189}{32}$ 。

**解法二(解析法):**如图 9, 因为  $A_1C\perp$  平面  $\alpha$ , 所以  $A_1C\perp EH, A_1C\perp EF, A_1C\perp HG$ 。

以  $D$  为坐标原点,  $DA, DC, DD_1$  分别为  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴, 建立空间直角坐标系  $D-xyz$ , 则  $A_1(4,0,3), C(0,4,0), E(4,3,3)$ 。

决的策略是设出未知数,表示所求点的坐标,然后根据已知的空间角建立关于该未知数的方程,解出方程的根即得所求结果。

**例 1** 如图 1, 在四棱锥  $B-ACDE$  中, 平面  $ABC\perp$  平面  $ACDE$ ,  $\triangle ABC$  是等边三角形。在直角梯形  $ACDE$  中,  $AE\parallel CD, AE\perp AC, AE=1, AC=CD=2, P$  是棱  $BD$  的中点。



(1) 求证:  $EP\perp$  平面  $BCD$ ;

(2) 设点  $M$  在线段  $AC$  上, 图 1

若平面  $PEM$  与平面  $EAB$  所成

二面角为  $60^\circ$ , 求  $AM$  的长。

解: 设  $H(a,0,3), F(4,b,0)$ , 则  $\overrightarrow{CA_1}=(4,-4,3)$ ,  $\overrightarrow{EH}=(a-4,-3,0), \overrightarrow{EF}=(0,b-3,-3)$ 。由  $\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{EH}=4(a-4)+12=0$ , 得  $a=1, \overrightarrow{EH}=(-3,-3,0)$ ,  $|\overrightarrow{EH}|=3\sqrt{2}$ 。由  $\overrightarrow{CA_1}\cdot\overrightarrow{EF}=-4(b-3)-9=0$ , 得  $b=\frac{3}{4}, \overrightarrow{EF}=(0,-\frac{9}{4},-3), |\overrightarrow{EF}|=\frac{15}{4}$ 。由对称性得  $|\overrightarrow{HG}|=\frac{15}{4}, AG=AF=b=\frac{3}{4}$ , 所以  $FG=\sqrt{2}AF=\frac{3\sqrt{2}}{4}$ 。以下同解法一。

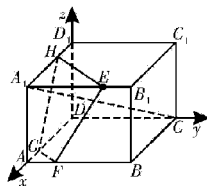


图 9

**小结:**本题几何法的原理是三垂线定理的逆定理,若  $HE\perp A_1C$ , 则  $HE\perp A_1C_1$ , 由此确定点  $H$  的位置, 同理确定点  $G, F$  的位置。坐标法是建立坐标系, 将两直线垂直关系转化为其方向向量的数量积为 0, 确定多边形顶点的位置, 可省去推理过程, 效率更高。

解决立体几何问题的重要思路是将空间问题转化为平面问题, 或将几何问题用坐标法解决。对于上述类似问题要记忆公式, 归纳总结解题方法, 达到熟能生巧的学习效果。

(责任编辑 王福华)