



简单多面体的内切球与 外接球问题解题基本方法

◇ 甘肃 杨子林

简单多面体的外接球和内切球问题是每年高考的热点问题,其解题的关键在于确定球心在多面体中的位置,找到球的半径或直径与多面体相关元素之间的关系,结合原有多面体的特性求出球的半径.

1 简单多面体的内切球半径

求简单多面体内切球半径利用体积分割法,这与求三角形内切圆的半径的方法(面积分割法)类似.求三角形内切圆的半径需要把内心与三个顶点分别相连,把三角形分割为三个小三角形,则 $S = \frac{1}{2}(a+b+c)r$,因此 $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

求多面体内切球的半径用体积分割法.把多面体内切球的球心与各顶点相连,则将该多面体分割为 n 个棱锥,设这 n 个棱锥的底面面积分别为 $S_1, S_2, \dots, S_n$,多面体的表面积为 S ,内切圆半径为 r ,于是

$$V = \frac{1}{3}S_1r + \frac{1}{3}S_2r + \dots + \frac{1}{3}S_nr = \frac{1}{3}Sr.$$

例 1 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形, $PD \perp$ 底面 $ABCD$, $PD = a$, $PA = PC = \sqrt{2}a$,若在这个四棱锥内放一球,求此球的最大半径.

解析 设此球半径为 R ,最大的球应与四棱锥各个面相切,设球心为 S ,连接 SA, SB, SC, SD, SP ,把此四棱锥分为 5 个棱锥,设它们的高均为 R .

$$V_{P-ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot PD = \frac{1}{3}a^3,$$

$$V_{P-ABCD} = V_{S-PDA} + V_{S-PDC} + V_{S-ABCD} + V_{S-PAB} + V_{S-PBC},$$

$$\frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}R(S_{\triangle PAD} + S_{\triangle PDC} + S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PBC} + S_{ABCD}),$$

$$\frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}R(2 + \sqrt{2})a^2, R = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})a.$$

因此,球最大半径是 $(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})a$.

2 简单多面体的外接球球心位置

简单多面体的外接球问题比较复杂,解题关键是确定外接球的球心的位置,本文介绍确定简单多面体

的外接球的球心位置的三个基本方法.

1) 定义法

一些特殊的几何体(如正方体、长方体等)可利用几何体的性质确定球心的位置.

例 2 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4, BC = 3$,沿 AC 将矩形折成一个直二面角 $B-AC-D$,求四面体 $ABCD$ 的外接球的体积.

解析 根据直角三角形斜边的中线等于斜边的一半,外接球球心是对角线 AC 的中点,因此球的半径是 $\frac{5}{2}$,则球的体积为 $\frac{125}{6}\pi$.

2) 性质法

利用球心 O 与截面圆圆心 O' 的连线垂直于截面圆、球心 O 与弦中点的连线垂直于弦、弦的垂直平分面必过球心的性质确定球心的位置.

例 3 如图 1,球面内接三棱锥 $P-ABC$, $PA \perp$ 平面 ABC , $PA = 2$, $\triangle ABC$ 是边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形,求球面的面积.

解析 取 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心为 E , $\triangle ABC$ 的外接圆就是外接球的一个轴截面圆,因为截面圆的圆心与球心的连线垂直于截面圆,与弦 PA 的垂直平分面相交于点 F ,则四边形 $AEFG$ 为平行四边形. $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $AE = 1$, $AG = 1$,外接球的半径为 AF ,则 $AF^2 = AE^2 + EF^2 = 2$, $AF = \sqrt{2}$,故球面的面积为 8π .

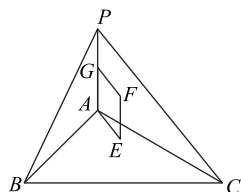


图 1

3) 补形法

同一顶点处的三条侧棱两两垂直的四棱锥补形为长方体,正四面体补形为正方体,对棱相等的四面体补形为长方体.

例 4 设三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA = BC = \sqrt{34}$, $PB = AC = \sqrt{41}$, $PC = AB = 5$,则该三棱锥外接球的半径为_____.

解析 一般地,对棱相等的四面体补形为长方体,长方体相对面的对角线长度相等,所以以相等的对棱当作长方体相对面的对角线将其补成长方体.设长方体的一个顶点上的三条棱长分别为 x, y, z ,则

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ y^2 + z^2 = 41, \\ z^2 + x^2 = 25, \end{cases} \text{ 即 } x^2 + y^2 + z^2 = 50, \text{ 四面体外接}$$

球的半径为 $5\sqrt{2}/2$.

(作者单位:甘肃省张掖市第二中学)