

基于关键能力考查的“外接球问题”

复习课设计示例

陈亚倩,赵国辉(陕西师范大学附属中学)

文章编号:1002-2171(2023)3-0062-03

1 专题综述

球体是自然界中常见的几何体,空间中的球体往往类比平面上的圆,在几何中有着独特、重要的地位,它是高中立体几何模块认识几何图形间的空间位置关系与数量关系的重要载体。通过建立球与凸多面体间的内切与外接问题,能够有效训练学生运用直观感知、操作确认、推理论证、度量计算等认识和探索空间图形的性质。

纵观近几年的高考试卷,外接球问题是高考常考问题,题型为选择题和填空题,题目难度为中档或中档偏上。它以球的截面圆的基本性质为知识主线,综合考查求空间几何体的体积、表面积及最值、取值范围等相关问题,解题过程中又蕴含着几何体线面关系的识别与论证。这类问题图形难画、位置难定、计算复杂,对学生的直观想象能力、逻辑推理能力、运算求解能力、数学建模能力等提出了较高要求。这类问题有很强的规律性,求解的关键是确定球心位置,求得半径。

结合高考试题的实际呈现及第一轮复习已达成的目标,高三第二轮复习备考在本节中的重点可确定为深刻理解球的截面性质,综合运用墙角模型、中线模型、中垂线模型建立凸多面体及其外接球的数量关系。教学难点是运用导数、均值不等式等工具解决相关最值问题。

2 知识梳理

凸多面体的外接球定义:若一个凸多面体的各个顶点都在一个球的球面上,则称这个凸多面体是这个球的内接多面体,这个球是这个凸多面体的外接球。

求解外接球半径 R 的常用方法:

(1)“墙角模型”——补体为长方体构造外接球。

如图1所示,由于空间不共面的四个点确定一个球,所以如果四面体 A_1ABD 与长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 存在不共面的四个重合点,则两个几何体的外接球为同一球体。由长方体体对角线长定理可得,外接

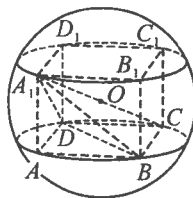


图1

球的直径 $2R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (a, b, c 为长方体共顶点的三条棱长)。事实上,任意凸多面体的外接球问题,均可化归为该多面体不共面的任意四个顶点所构成的四面体的外接球问题。

故对棱相等的三棱锥、四个面都是直角三角形的三棱锥等均可补体为长方体再构造外接球(如图2,图3)。

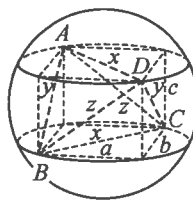


图2

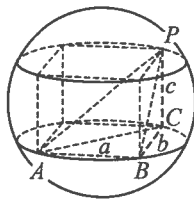


图3

(2)“中线模型”——应用球的定义构造外接球。

如图4所示,在四面体 $ABCD$ 中存在共斜边 BC 的两个直角三角形面(即 $\angle BAC = \angle BDC = 90^\circ$),公共斜边的中点 O 到该四面体 $ABCD$ 的所有顶点的距离相等,则中点 O 为四面体 $ABCD$ 外接球的球心。

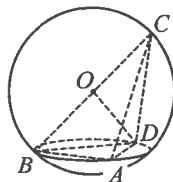


图4

(3)“中垂线模型”——应用球的定义构造外接球。

经过凸多边形的外心,且与多边形所在平面垂直的直线,叫作该多边形的中垂线。凸多边形的中垂线上任意一点到该多边形的所有顶点的距离相等。

如图5所示, O_1 是 $\triangle ABC$ 的外心, m 为经过点 O_1 且与平面 ABC 垂直的直线。设侧棱 DB 的一条中垂线 n 与 m 相交于点 O ,则点 O 到四面体 $ABCD$ 的顶点的距离相等,则 O 即为其外接球的球心, OA,OB,OC,OD 均为半径。

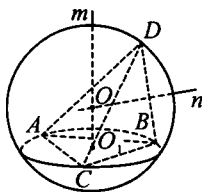


图5

上, $PA=PB=PC$, $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形, E,F 分别是 PA,AB 的中点, $\angle CEF=90^\circ$,则球 O 的体积为()。

- A. $8\sqrt{6}\pi$ B. $4\sqrt{6}\pi$ C. $2\sqrt{6}\pi$ D. $\sqrt{6}\pi$

解:如图6,因为 E,F 分别是 PA,AB 的中点,所以 $PB\parallel EF$,则由 $\angle CEF=90^\circ$ 可知 $PB\perp EC$ 。

因为 $P-ABC$ 为正三棱锥,所以 $PB\perp AC$,则 $PB\perp$ 平面 PAC ,即 PA, PB, PC 两两互相垂直。因为 $\triangle ABC$ 是边长为2的正三角形,所以通过补体所得到的正方体的棱长为 $\sqrt{2}$,设外接球的半径为 R ,则 $2R=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}$,解得 $R=\frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

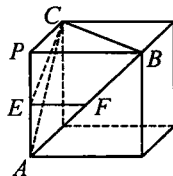


图6

3 例题分析

3.1 应用“球的截面性质”解决外接球问题

例1 (2022年高考数学全国乙卷理科第9题) 已知球 O 的半径为1,四棱锥的顶点为 O ,底面的四个顶点均在球 O 的球面上,则当该四棱锥的体积最大时,其高为()。

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解:设该四棱锥为 $O-ABCD$,四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的夹角为 α ,四边形 $ABCD$ 所在小圆的半径为 r 。

由 $S_{\text{四边形}ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot \sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}AC\cdot BD\leqslant 2r^2$ 可知,当四边形 $ABCD$ 为正方形时其面积最大。

设该四棱锥的高为 $h(0<h<1)$,则 $\frac{AC}{2}=\sqrt{1-h^2}$,即 $(S_{\text{四边形}ABCD})_{\max}=\frac{AC^2}{2}=2(1-h^2)$ 。

$$V=\frac{2}{3}(h-h^3), \text{ 则 } V'=-2\left(h+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(h-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),$$

易得该函数在区间 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 内单调递增,在区间 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$ 内单调递减,即当四棱锥 $O-ABCD$ 体积取得最大值时 $h=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

故选C。

方法点睛:本题以球的截面基本性质为知识主线,以几何体的体积最值为求解目标。在方法设计的过程中,应尽量引入单参数,并遵循“求解什么设什么”的基本原则(本问题由于求高的值,故设高为 h),有效减少了运算量。

3.2 应用“墙角模型”解决外接球问题

例2 (2019年高考数学新高考卷I理科第12题) 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面

$$\text{所以 } V_{\text{球}}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi.$$

故选D。

有的学生会采用建系的方法:如图7建立空间直角坐标系。

$$\text{令 } |PO|=h, \text{ 则 } E\left(\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{1}{2}, \frac{h}{2}\right),$$

$$F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right), C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right),$$

$$P(0, 0, h).$$

$$\text{由 } \overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{EF}=0, \text{ 可求得 } h=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

设球心坐标为 $Q(0, 0, t)$,由 $|QP|=|QC|$,得

$$\left(t-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{4}{3}+t^2, \text{ 解得 } t=-\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$\text{所以球的半径 } R=|QC|=\sqrt{\frac{4}{3}+\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{从而 } V_{\text{球}}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\sqrt{6}\pi.$$

方法点睛:本题在解决的过程中,核心是在熟练掌握正三棱锥基本性质的基础上(正三棱锥的每对异面对棱互相垂直),能够将主体条件中数量关系($\angle CEF=90^\circ$)转化为位置关系($PB\perp EC$),进而回归基本的数学模型。本题的求解遵循了研究立体几何问题的基本路径,即位置关系论证先行,数量计算后置。

在没有思路的情况下,建系也是一种处理方式,但运算量相对较大,略显“小题大做”。

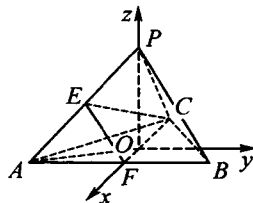


图7

3.3 应用“中线模型”解决外接球问题

例3 (2017年高考数学全国卷I文科第16题) 已知三棱锥 $S-ABC$ 的所有顶点都在球 O 的球面上, SC 是球 O 的直径. 若平面 $SCA \perp$ 平面 SCB , $SA=AC$, $SB=BC$, 三棱锥 $S-ABC$ 的体积为 9, 则球 O 的表面积为_____.

解: 如图 8 所示, 因为中线 $OA=OB=\frac{CS}{2}$, 所以 $\angle CAS=\angle CBS=90^\circ$ (也可由直径所对球周角为直角得到).

设球 O 的半径为 R , 则可得 $SA=AC=SB=BC=\sqrt{2}R$, 所以 $SC \perp$ 平面 OAB .

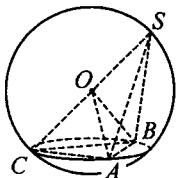


图 8

$$\text{由 } V_{S-ABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle OAB} \cdot SC = \frac{1}{3} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 2R = \frac{R^3}{3} = 9$$

可解得 $R=3$,

所以 $S=36\pi$.

本题也可利用球的截面性质, 先计算点 O 到平面 ABC 的距离, 其 2 倍即为点 S 到平面 ABC 的距离, 进而得到三棱锥 $S-ABC$ 的高, 代入锥体体积公式即可得到结论.

方法点睛: 同一个数学问题, 往往有多种不同的解决方案. 在选择解法时, 应聚焦常用数学情境中的通性通法, 要预设当问题发生细微变化时, 相关解法是否易于迁移. 利用几何体的截面进行体积和侧面积的研究, 是常用的解法.

3.4 应用“中垂线模型”解决外接球问题

例4 (2021年高考数学新高考卷II第7题) 已知正三棱台的高为 1, 上、下底面边长分别为 $3\sqrt{3}$ 和 $4\sqrt{3}$, 其顶点都在同一球面上, 则该球的表面积为().

A. 100π B. 128π C. 144π D. 192π

解: 如图 9 所示, D 和 D_1 分别是正 $\triangle ABC$ 和正 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外心, 联结 DD_1 , 则其为 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中垂线. 取侧棱 BB_1 的中垂线使其与 DD_1 相交于点 O , 则 O 即为正三棱台 $A_1B_1C_1-ABC$ 外接球的球心.

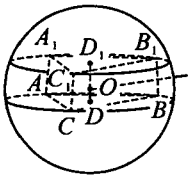


图 9

由题意可得, $DD_1=1$, $DB=4$, $D_1B_1=3$, 如图 10 所示, 建立平面直角坐标系 xOy , 易得 BB_1 的中垂线方程为 $y=x-3$, 则 O 的坐标为 $(0, -3)$, 解得 $|OB|=5$, 所以该球的表面积为 100π .

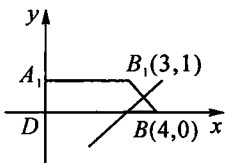


图 10

故选 A.

方法点睛: 本题在算法设计时, 依旧遵循了外接球问题的一般研究路径, 即先寻求定位条件(球心), 再寻求定形条件(半径). 而在计算方法上, 使用了局部建立平面直角坐标系的方式, 借助坐标化求解球的半径. 对于“中垂线模型”构造外接球问题, 这种计算方法具有较好的实用性和迁移性.

3.5 几何体的内切球问题

例5 若三棱锥 $A-BCD$ 的两条棱 $AB=CD=6$, 其余各棱长均为 5, 则三棱锥的内切球的半径为_____.

解: 如图 11 所示, 取 AB 的中点 P , 联结 PC, PD , 设该三棱锥的内切球半径为 r .

由于 $\triangle CAB$ 与 $\triangle DAB$ 为全等的等腰三角形, 则 $AB \perp$ 平面 PCD .

由 $S_{\triangle PDC} = 3\sqrt{7}$, 可得 $V_{A-BCD} =$

$$\frac{1}{3} S_{\triangle PCD} \cdot AB = 6\sqrt{7}.$$

由 $S_{\triangle ABC} = 12$ 可得 $S_{\text{全}} = 48$, 则由 $V = \frac{1}{3} S_{\text{全}} r$ 解得

$$r = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

方法点睛: 若凸多面体的全面积为 S , 体积为 V , 其内切球的半径为 r , 则 $V = \frac{1}{3} S r$. 与凸多面体内切球的有关问题, 常应用上述算法求内切球的半径, 这种方法相对于几何法(先定位球心、再定量半径)的适用性更强.

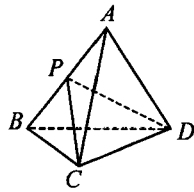


图 11

4 反馈训练

(1) 已知 A, B, C 为球 O 的球面上的三个点, 圆 O_1 为 $\triangle ABC$ 的外接圆. 若圆 O_1 的面积为 4π , $AB=BC=AC=OO_1$, 则球 O 的表面积为().

A. 64π B. 48π C. 36π D. 32π

(2) 已知在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $PC \perp AB$, 若三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的半径是 3, $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ABP} + S_{\triangle ACP}$, 则 S 的最大值是().

A. 36 B. 28 C. 26 D. 18

(3) 已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 且 $\triangle PAB$ 为等边三角形, 则该四棱锥的外接球的表面积为().

A. $\frac{28}{3}\pi$ B. $\frac{112}{3}\pi$ C. 32π D. $\frac{256}{3}\pi$