

二项式定理一轮复习备考建议

■ 贵州省实验中学 刘朝海

一、考点内容梳理

《普通高中数学课程标准(2017 年版)》将二项式定理划归到选择性必修中,具体要求为“能用多项式运算法则和计数原理证明二项式定理,会用二项式定理解决与二项式展开式有关的问题。”其核心目标是解决二项式展开式有关的问题。

通过研究近十年(2013~2022 年)全国高考卷中有关二项式定理的考题,不难发现:二项式定理考查的频率相对不高,试题居于填空题的前面两个,题目难度偏低;考查的内容主要是二项式定理中展开式的通项公式及展开式中的一些结论。

决问题时可以借助数形结合的方法。

(4)在复数问题中出现绝对值时,要注意理解为复数的模的运算,而非取正,可以通过近几年的高考真题进行一轮备考训练,确保复数在高考中不丢分。

三、例题精选

例 1 (复数的有关概念) 设复数 z 满足 $i z - 3 - i = z$, 则 z 的虚部为()。

A. $-2i$ B. $2i$ C. -2 D. 2

解析: 因为 $i z - 3 - i = z$, 所以 $(1-i)z = -3-i$, 则 $z = \frac{-3-i}{1-i} = \frac{(-3-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2-4i}{2} = -1-2i$ 。故选 C。

例 2 (复数的模) 已知复数 $z = a + (a-2)i$ 在复平面内对应的点位于第一象限, 且 $|z| = \sqrt{10}$, 则 $\frac{z}{i} =$ ()。

A. $3-i$ B. $3+i$
C. $1+3i$ D. $1-3i$

解析: 由题意知 $\begin{cases} a > 0, \\ a-2 > 0, \end{cases}$ 由 $|z| = \sqrt{a^2 + (a-2)^2} = \sqrt{10}$, 解得 $a = 3$ 或 $a = -1$

二、例题讲解

1. 展开式中项与项的系数

二项式展开式中的通项公式是一个核心考点,原因在于通过通项公式可以计算展开式中的任意项。通项公式中有几个概念需要注意区别,以免混淆失分,特别是二项式系数和项的系数之间的辨析。

例 1 求 $(1-2x)^7$ 的展开式的第 4 项的系数。

分析: 本题主要考查二项式定理中展开式的通项公式 $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, 考查同学们的数学运算能力。

解: $(1-2x)^7$ 的展开式的第 4 项是 T_{3+1} (舍去), 故 $\frac{z}{i} = \frac{3+i}{i} = (3+i) \cdot (-i) = -3i+1$ 。故选 D。

例 3 (复数的四则运算) 已知 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位。若 $a+i=3-bi$, 则 $(b-ai)^2 =$ ()。

A. $10+6i$ B. $-8+6i$
C. $9-6i$ D. $8-6i$

解析: 由 $a+i=3-bi$, $a, b \in \mathbf{R}$, 可得 $a=3, b=-1$, 所以 $(b-ai)^2 = (-1-3i)^2 = (-1)^2 + (-3i)^2 + 2(-1)(-3i) = -8+6i$ 。故选 B。

例 4 (复数的几何意义) 若复数 z 满足 $z \cdot (2-i) = 2i+3$ (i 为虚数单位), 则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于()。

A. 第一象限 B. 第二象限
C. 第三象限 D. 第四象限

解析: 因为 $z \cdot (2-i) = 2i+3$, 所以 $z = \frac{2i+3}{2-i} = \frac{(2i+3)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$, 在复平面内对应的点是 $(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5})$, 位于第四象限。故选 D。

(责任编辑 王福华)

$$=C_7^3 \times 1^{7-3} \times (-2x)^3 = C_7^3 \times (-2)^3 \times x^3 = -280x^3.$$

所以展开式的第 4 项的系数是 -280。

评注:本题主要考查二项式定理的通项公式,对于通项公式需要注意项、项的系数、二项式系数之间的区别。

2. 展开式中项的系数和

对于二项式展开式中项的系数和、奇数项的系数和、偶数项的系数和,命题者往往需要我们求解其值。该类问题主要采用赋值法予以解答,一般情况下, x 可以尝试赋值为 0, 1, -1 等。

例 2 设 $(2x+1)^7 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_7x^7$, 求:

$$(1) a_1 + a_2 + \cdots + a_7;$$

$$(2) a_1 + a_3 + a_5 + a_7.$$

分析:本题主要涉及二项式展开式中系数的关系,可以采用赋值法。

解:(1)令 $x=0$, 则 $a_0=1$ 。

$$\text{令 } x=1, \text{ 则 } 3^7 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_7.$$

$$\text{所以 } a_1 + a_2 + \cdots + a_7 = 3^7 - 1.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) + (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = 3^7. \quad \textcircled{1}$$

$$\text{令 } x=-1, \text{ 则 } (a_0 + a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) = -1. \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ 得 } a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = \frac{3^7 + 1}{2}.$$

评注:本题主要采用赋值法解决二项式展开式中的系数问题,本题还可以通过变形展开后求系数。

3. 展开式中的综合问题

二项式中的综合问题的主要考查方向是将底数的项数变为三项式,该类问题可以尝试因式分解,转化为两个二项式相乘问题;也可以尝试将其中两项看作一项,转化为二项式里面嵌套一个二项式问题来解决。

例 3 $(x^2-x-2)^5$ 的展开式中 x^3 项的系数为_____。

分析:本题的括号内为三项式,考虑因式分解后,采用分类讨论思想解决。

$$\text{解: } (x^2-x-2)^5 = (x+1)^5(x-2)^5, \text{ 其}$$

中, $(x+1)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{k+1} = C_5^k x^{5-k}$; $(x-2)^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r}(-2)^r$ 。

欲求 x^3 项的系数, k 与 r 的取值情况有四种: $k=0, r=3$; $k=1, r=2$; $k=2, r=1$; $k=3, r=0$ 。

$$\text{故 } x^3 \text{ 的项系数为 } C_5^2(-C_5^3 \cdot 2^3) + C_5^3 \cdot (C_5^1 \cdot 2^1) + C_5^4(-C_5^2 \cdot 2^2) + C_5^5(C_5^0 \cdot 2^0) = 120.$$

评注:本题主要考查因式分解之后,将其看作两个二项式的展开式相乘,对于最终产生 x^3 项的系数进行分类讨论。若括号内不能进行因式分解,则需考虑组合展开。

三、备考建议

从课程标准和历年的考题来看,二项式定理的考查主要集中在展开式的通项公式、相关的概念及二项式系数的相关结论。故在第一轮复习过程中给出如下建议:

(1)强化通项公式的使用,注意区别项、项的系数及二项式系数等有关概念,避免因概念理解不清而失分。实践表明,许多同学在利用通项公式解决问题时,由于不关注概念之间的区别,导致失分。例如,展开式中某项的系数、二项式系数和项之间易混淆。

(2)注意赋值法及因式分解的使用,确保分类讨论不遗漏。利用赋值法解决展开式中奇偶项的系数和是涉及系数的正负号问题,特别是系数带有绝对值问题时,对于正负问题更需细心,如例 2 中还可以变式设问 $|a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$;针对例 3 中的展开式综合问题,常见的一种解决手段是分解成两个二项式问题进行求解,此时需要两部分的项与项相乘得出最终的展开式,对于次数的情况讨论成为解决问题的突破口。

(3)熟悉二项式系数之和、对称性、增减性等常见性质,便于抓住解题的突破口。命题者为提升题目本身的难度,往往需要借助一些结论来计算 n 的值,据此转化为常规问题。这就要求同学们在复习备考时,需要牢记一些结论来帮助我们解决问题。

(责任编辑 王福华)