向量法解立体几何
中点线面的位置关系问题

田 宝 运

(沂南县第一中学,山东　276300)

中图分类号:O123.2－44　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**0488－7395(2003)03－0013－02

为适应高中数学教材改革的新情况,需要研究用向量方法求解立体几何的各种问题.本文举例说明如何用向量方法解决立几中点、线、面的位置关系问题.以此强化"向量"的应用价值,激发学生学习向量的兴趣,从而达到提高探索和创新能力之目的.现举例说明如下.

1　根据共线向量定理证点共线

欲证点共线,通常先构造共始点的向量,再根据共线向量定理证明.

例 1　已知,如图 1,长方体 AC_1 中,M 为 DD_1 的中点,N 在 AC 上,且 AN:$NC=2$:1,E 为 BM 的中点.求证:A_1,E,N 三点共线.

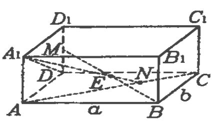

图 1　例 1 图

证　$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,

则 $\overrightarrow{A_1N}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AA_1}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AA_1}$

$=\frac{2}{3}(\mathrm{a}+\boldsymbol{b})-\boldsymbol{c}$,

$\overrightarrow{A_1E}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{A_1M})$

$=\frac{1}{2}[(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1})+(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AA_1})]$

$=\frac{1}{2}[(\mathrm{a}-\boldsymbol{c})+(\mathrm{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}-\boldsymbol{c})]$

$=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{3}{4}\boldsymbol{c}$

$\therefore\overrightarrow{A_1E}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1N}$.

故 A_1,E,N 三点共线.

2　根据相等向量证线共点

欲证线共点,可先在某线上找出一定点(常是唯一的特殊点),再证其余各线都过这一定点.

例 2　已知:平行六面体 $ABCD$-$A'B'C'D$(如图 2).

求证:对角线 AC',BD',CA',DB' 相交于一点 O,且在点 O 处互相平分.

证　如图 2,设点 O 是 AC'的中点,则

$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}$

$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$.

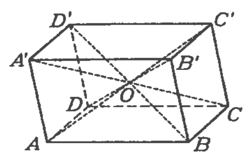

图 2　例 2 图

设 P,M,N 分别是 BD',CA',DB'的中点,同样可证

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$,

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$,

$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'})$.

由此可知 O,P,M,N 四点重合,命题得证.

3　根据共面向量定理证线(或点)共面

例 3　已知,如图 3,E,F,G,H,K,L 分别为正方体 AC_1 的棱 AA_1,

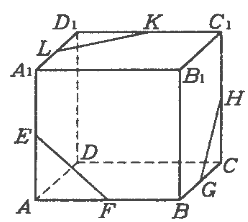

图 3　例 3 图

收稿日期:2002－10－14

作者简介:田宝运(1973－),男,山东沂南人,山东沂南县第一中学二级教师.

AB，BC，CC_1，C_1D_1，A_1D_1 的中点．求证 EF，GH，KL 三线共面．

证 设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$，

则 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1})$

$=\frac{1}{2}(\mathrm{a}-\boldsymbol{c})$，

$\overrightarrow{GH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD_1}=\frac{1}{2}(\mathrm{b}+\boldsymbol{c})$，

$\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{2}(\mathrm{a}+\boldsymbol{b})$，

$\therefore \overrightarrow{EF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{KL}=\boldsymbol{0}$，

故 EF，GH，KL 共面．

4 根据共线向量定理证两直线(或线与面、面与面)平行

例 4 求证：如果两条直线同垂直于一个平面，则这两条直线平行．

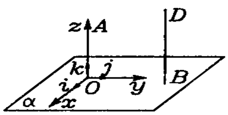

图4 例4图

已知：直线 $OA\perp$ 平面 α、直线 $BD\perp$ 平面 α，O，B 为垂足．

求证：$OA/\!/BD$．

证 如图4，以点 O 为原点，以射线 OA 为非负 z 轴，建立空间直角坐标系 O-xyz，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 为沿 x 轴，y 轴、z 轴的单位向量，且设 $\overrightarrow{BD}=(x,y,z)$．

$\because \overrightarrow{BD}\perp\alpha$，

$\therefore \overrightarrow{BD}\perp\boldsymbol{i}$，$\overrightarrow{BD}\perp\boldsymbol{j}$．

$\therefore \overrightarrow{BD}\cdot\mathbf{i}=(x,y,z)\cdot(1,0,0)=x=0$，

$\overrightarrow{BD}\cdot\mathbf{j}=(x,y,z)\cdot(0,1,0)=y=0$．

$\therefore \overrightarrow{BD}=(0,0,z)$．

$\therefore \overrightarrow{BD}=z\boldsymbol{k}$，$\therefore \overrightarrow{BD}/\!/\boldsymbol{k}$，又 O，B 为两个不同点，

$\therefore BD/\!/OA$．

5 根据两非零向量的数量积为零，证两直线(或直线与面)垂直

例 5 证明直线和平面垂直的判定定理．

已知：如图5，m，n 是平面 α 内的两条相交直线，直线 l 与 α 的交点为 B，且 $l\perp m$，$l\perp n$．

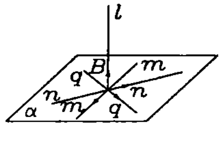

图5 例5图

求证：$l\perp\alpha$．

证 在 α 内作不与 m，n 重合的任一条直线 g，在 l，m，n，g 上取非零向量 $\boldsymbol{l}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{g}$，则 $\boldsymbol{g}=x\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n}$($x$，$y\in\mathbf{R}$)．

$\because \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{g}=\boldsymbol{l}\cdot(x\boldsymbol{m}+y\boldsymbol{n})=x\cdot\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{m}+y\cdot\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=0$，

$\therefore \boldsymbol{l}\perp\boldsymbol{g}$，$\therefore l\perp g$，$\therefore l\perp\alpha$．

例 6 (2001年上海高考第19题)在棱长为 a 的正方体 $OABC$-$O'A'B'C'$ 中，E，F 分别为棱 AB，BC 上的动点，且 $AE=BF$，求证：$A'F\perp C'E$．

证 如图6建立空间直角坐标系 O-xyz．

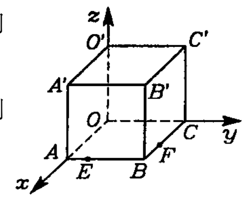

图6 例6图

设 $AE=BF=m$，则 $A'(a,0,a)$，$F(a-m,a,0)$，$C'(0,a,a)$，$E(a,m,0)$，$\overrightarrow{A'F}=(-m,a,-a)$，

$\overrightarrow{C'E}=(a,m-a,-a)$，

$\overrightarrow{A'F}\cdot\overrightarrow{C'E}=(-m,a,-a)\cdot(a,m-a,-a)$

$=-am+a(m-a)+a^2=0$．

所以 $A'F\perp C'E$．

例 7 (2000年天津、山西高考第18题)直三棱柱 ABC-$A_1B_1C_1$，底面 $\triangle \mathrm{ABC}$ 中，$\mathrm{CA}=CB=1$，$\angle \mathrm{BCA}=90^\circ$，棱 $AA_1=2$，M，N 分别是 A_1B，A_1A 的中点，求证 $A_1B\perp C_1M$．

证 建立如图7所示坐标系 C-xyz，则 $A_1(1,0,2)$，$B(0,1,0)$，$C_1(0,0,2)$，$M(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2)$，$\overrightarrow{A_1B}=(-1,1,-2)$，

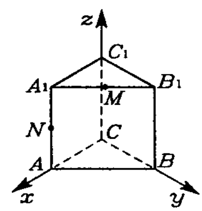

图7 例7图

$\overrightarrow{C_1M}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$，

$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{C_1M}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0$．

所以 $A_1B\perp C_1M$．

通过以上例题可以看出，研究点、线、面的位置关系都可用向量法来加以解决，一些问题中合理建立空间直角坐标系是关键，它是完成从几何问题向代数问题转化的基础，这一新颖的解题方法无疑为学生发展创新思维提供了条件．