少教多学作引领，核心素养质飞跃
——以高三一轮复习课“解三角形”为例

江苏省南京师大附中江宁分校 吕翠华 蒋荣荣

近年数学高考题更多关注数学素养立意，多数题目以策略性知识为背景，不仅考查学生的知识储备、运算能力，还考查学生数学学科素养以及分析问题和解决问题的能力.这其中解决问题能力是至关重要的，平时解题教学的课堂中，教师更应关注如何提高学生的解题能力，而解题教学活动是促进学生思维发展、提升解题能力的重要途径.

为了避免教学中单纯的“题海战术”，将解题问题提升到深层次的“思想方法的渗透”，笔者所在学校开展了“少教多学”的课堂教学研究，提出“少教多学精讲课堂”教学主张，在课堂教学实践和课堂教学评价等方面做了不少探索.笔者以高三“解三角形”一轮复习课为例，通过少而精的“问题串”启发学生思考，暴露和揭示学生的思维过程，培养学生分析问题和解决问题的能力，促进学生进行有意义学习和深度学习，从而达到发展学生数学核心素养的育人目标.以下是这节课的教学过程及反思，不当之处，敬请批评指正.

1.教学过程实录

问题1:关于三角形中的知识，你都了解哪些?

【设计意图】主要是了解学生的知识储备情况，让学生对解三角形的常用知识点有初步的脉络化知识构建.这是一个开放性的问题，每个学生所给出的答案可能并不一样，在别人回答问题时，其他学生都会与自己的知识网络体系相对比，从而更好的对知识进行梳理、归纳，查漏补缺.

问题2:关于一些特殊的三角形中的边角关系，你还知道哪些?

【设计意图】这也是个比较开放的问题，当第一个学生讲完之后，教师不要越俎代庖，只要追问:“其他同学还有要补充或者完善的吗?”.在这个环节中，除了多次用到的正余弦定理之外，还会遇到其他学生补充的解题中使用频率较低，以致很多时候容易被忽略的一些知识碎片，如:在锐角三角形中，任意两边的平方和大于第三边的平方;在钝角三角形中，存在两边的平方和小于第三边的平方等等.这需要学生对刚才所提到的知识点与自己已有的知识结构进行实质性的联系、整合、筛查，形成自己的知识网络结构，相当于进行了一次有效的头脑风暴，也是一次有意义的建构性学习.陶维林老师曾多次指出:“题目只是载体，我们要带领学生挖掘隐藏在题目背后的那些能够迁移的知识与方法.”

下面我们一起用刚才梳理的知识来解决三角形中的实际问题.

例题:已知$\triangle ABC$中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$\cos A=\frac{4}{5}$，$b=5c$，求$\sin C$的值.

本题请几位有不同想法的学生板演.

【设计意图】该问题的设计意图是让学生学会合理选择正余弦定理来解决解三角形问题.该问题给出后要给学生独立的思考时间和空间，充分暴露学生的思维过程，动手书写规范的解题步骤.此时，在学生没有形成自己的想法之前，教师不要干预，更不要滔滔不绝地开始讲解，这样不仅干扰了学生的思考，还失去了培养学生独立分析问题和解决问题的机会，这就是很多教师经常抱怨“为什么这个问题讲了很多遍，学生还是做错?”的原因所在.数学是思维的体操，在课堂教学中，我们要注重培养学生的思维能力.

以下是两位学生的板演情况:

生1:在$\triangle ABC$中，由余弦定理，$a^2=b^2+c^2-$

本文系南京市教育科学规划第十期个人课题““少教多学”理念下的高中教学课堂教学模式研究”的后续研究成果.

$2bc\cos A=18c^2$，所以 $a=3\sqrt{2}c$．由正弦定理，$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，即 $\frac{3\sqrt{2}c}{\frac{3}{5}}=\frac{c}{\sin C}$，解得 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{10}$．

生2：由 $b=5c$ 得 $\sin B=5\sin C$，又因为 $B=\pi-(A+C)$，故 $\sin(A+C)=5\sin C$，

即 $\sin A\cos C+\cos A\sin C=5\sin C$，解得 $\tan C=\frac{1}{7}$，所以 $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{10}$．

问题3：请所有同学看一下黑板，哪个做得最好，好在哪里？哪个需要完善，请你帮助他完善．

【设计意图】 学生是课堂的主体，但一直以来，很多教师在课堂中总会出现“满堂灌”、“一讲到底”等种种替代学生思考的行为，以至于出现学生处于被动学习，被老师牵着走的现象．而此时，教师只需引导学生进行比较、修改、归纳、总结．“少教”不是不教，而是强调巧妙、灵活地教．这里让学生之间相互点评各种方法的优劣，书写的规范等等，不仅调动了学生学习的积极性，还让思维碰撞出智慧的火花．紧接着，笔者继续追问：“其他的同学还有不同的想法或者需要补充的吗？”将思维活动推向高潮，使学生陷入了深度的思考……

问题4：同学们在分析解决这个问题的过程中，都做了哪些工作？

【设计意图】 启发性是数学教学的一般原则．教师作为向导，站在学生的角度，从学生的知识、思维水平、经验水平出发，提出适当的问题，引导学生思考，使学生的思维向着新知或更高目标靠拢，最后总结归纳出可以迁移到其他类型问题的解题方法．教师只有站在更高的角度，提出统领性的问题，在解题思维的层面上给学生做到引领作用．

生：首先画图．

师：很好！在解决与几何图形有关的问题时请同学们记住一定要画草图，图形比数据要直观，它能给你些启示，引导你选择比较简便的解题方法．

问题5：上述问题，你为什么先选择余弦定理，然后又选择正弦定理呢？

【设计意图】 本题属于基础小题，但却蕴含着“大道理”．难点在于如何合理地选择使用正、余弦定理．许多学生在解决三角形相关问题时，大多是在“碰运气”．虽然知道常用工具是正、余弦定理，但却不知道什么时候用哪个定理，在这样的解题关键处停下来设问，教会学生在具体问题中学会思考是非常重要的，这里是解题思维的提升点．同时，也有效地培养了学生的逻辑推理这一数学素养．

生：在一个三角形中，如果已知角 A 及角 A 的两条邻边，我们就可以用关于角 A 的余弦定理求出边之间的关系；如果题目中涉及两角及其中一个角的对边时，我们常常选择使用正弦定理．

师：说的好！请其他同学根据刚才的分析，整理一下使用正余弦定理的情境．

(给学生2分钟总结刚才这个问题中能够迁移到其他问题中的知识与方法)

【设计意图】 很多时候我们在上课中总是急于讲、练，而忽视了一个很重要的“课堂留白”问题．学生在经历了自主探究、合作交流等一系列的活动之后，此时需要趁热打铁，将刚才收获的一些重要结论和思想方法消化、吸收，进一步同化到自己的知识网络结构之中，这样的过程是学生进行深度学习所必需的．

师：同学们，前面我们讲过，在解题时首先要看清题目的已知条件，明确“有什么”？甚至能够将条件进行适当地转化，比如：你看到“$b=5c$”会想到什么？还会想到什么？

生：除了想到边之间的关系之外，还能想到 $\sin B=5\sin C$．

师：很好！当我们明确了“有什么”后，接下来应该关注“求什么”了，题目中要求角 C，那我们该如何分析呢？

生：将上式中的角 B 用 $\pi-(A+C)$ 来替换．

问题6：你为什么将角 B 用 $\pi-(A+C)$ 来替换？

【设计意图】 与问题5一样，在解题关键处(往往是学生一看就懂，但不太能想到的地方)停下来，多问问“为什么”，这样更能够挖掘学生思维深处的逻辑认知关系，以致于到此处后接下来不得不这么做——也就是消元，再一次深化解决问题的一般性步骤：“有什么？”，“干什么？”“怎么干？”，同时也培养了学生的数学运算、逻辑推理等数学核心素养．正如波利亚在《怎样解题》一书中提到，“弄清题意(有什么？角A及角B与 C 的关系)、拟定计划(消元)、实现计划、回顾反思(何时用正弦定理？)”，这就是我们在解题教学中所追

求的,要让学生明白为什么要这么做,达到真正意义上的授人以渔.

生:因为这样才能使得上述方程只保留了“已知”和“求证”的条件,也就建立了关于角C的方程.

问题7:通过刚才解决这个问题,你还有哪些收获?

师生共同反思总结:

刚才我们在解决三角形求值问题时分别采用了两种常用的求解方式:

1. 分步求解:如果经过分析题目不能一步解决时,此时可以选择分步计算(当题目中涉及两边及夹角或三边时,常用余弦定理;当题目中涉及两角及其中一个角的对边时,常用正弦定理).

2. 建立方程:如果根据题目的条件能够建立只有“已知”和“求解”的方程,常会起到事半功倍的效果.这个过程可能需要将其他的元素用“已知”和“求解”的条件来替换.

【设计意图】 在“少教多学精讲课堂”教学主张中,对于学生课堂上的每次展示、交流,教师都要有基于学生总结基础上的再提炼与再归纳;更要有基于这类共性问题的解决策略或方法的整理与提升.这不仅提升了学生的解题思维能力,还进一步培养了学生数学抽象的核心素养.

变式练习:在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$a^2-c^2=8b$,$\sin A\cos C+3\cos A\sin C=0$,求$b$.

摘录学生的两种解法:

解法一:由$\sin A\cos C+3\cos A\sin C=0$,得

$$a\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+3\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}c=0.$$

化简得$a^2-c^2=2b^2$,又由已知$a^2-c^2=8b$,联立解得$b=4$.

解法二:由$\sin A\cos C+3\cos A\sin C=0$,得

$(\sin A\cos C+\cos A\sin C)+2\cos A\sin C=0$,

即$\sin B+2\cos A\sin C=0$,故$b+2\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}c=0$,化简得$a^2-c^2=2b^2$,又由已知$a^2-c^2=8b$,联立解得$b=4$.

问题8:你们觉得这两位同学的解法怎么样?你赞同他们的做法吗?

【设计意图】 本着少教多学的原则,课堂上的讲、评、思等环节都尽量放手给学生.在已知边角相关关系,要求边的过程中,学生已经知道由正、余弦定理将角化成边,但重要的是还要让学生知道为什么这么做.另外,如果学生在看完解法二之后,还能比较得到“余弦定理公式中的次数相对于正弦定理公式中的次数较高”这样的信息,最终悟出用一次余弦定理比用两次化简的过程会更简便些,那么这个题目的解题思维的训练目的就已经达到.章建跃老师曾经说过:“要使学生真正理解书本知识,必须要有他们身体力行的实践,从亲力亲为的探索思考中获得体验!”,课堂上这样的机会应还给学生,这样他们才会有多学的权利.

2.教学反思

2.1教学策略的反思

2.1.1注重数学解题思维的塑造,培养数学核心素养

高三一轮复习,教师不能仅停留在基本知识复习的层面,应着眼于数学解题思维的培养和提升上.本节课的主要教学策略是以具体题目为载体,以学生板演、点评完善和教师点睛为主要活动形式,在每一次的点评和总结中,笔者都会关注到解题背后的“为什么”这个可引发学生进行深度思考的问题.这样不仅夯实了“四基”,培养了“四能”,也很好地发展学生逻辑推理、数学运算、数学抽象等数学核心素养.

此外,解题教学是高三常见的教学内容,我们常常把“教会学生解题”挂在嘴边,但有些思路(学生在解题中出现的)并不是我们教出来的,而是学生根据自己已有经验和知识储备建构的,有的虽然不完美、不顺畅,但思路却值得借鉴的.不同学生的不同想法与思路都有其合理成分,而对于教师而言,不要过多的干预,只要帮助学生完善(或拓宽)其解题思路即可.如变式中,来自学生的解法二在角化边之前先进行一些角的运算再化成边,从运算的角度看,确实比较简洁,教师借助其他同学的评价适时的给大家提醒、强调.这样不仅调动了学生的学习兴趣,唤起了大胆参与到课堂的信心,也有利于培养学生良好的思维品质.

2.1.2推动数学探究思维的形成,引领学生深入思考

我国著名教育家陶行知先生说:“所谓教师之主

导作用,重在善于启迪,使学生自奋其力,自致其知,非谓教师滔滔讲说,学生默默聆听."本节课笔者在"少教多学"理念的引领下,通过精心设计的能激发学生自主、合作、探究的主问题与问题串来调动学生学习的积极性,在这个过程中,学生课堂上的每次展示、交流,笔者都有基于学生总结基础上的再提炼与再归纳.还有基于这类共性问题的学生思考基础上的策略或方法的整理与提升(同时形成了板书).这样不仅尊重了学生的思维过程,还能培养学生独立思考、敢于创新的精神,更能提高学生全面深入地分析、思考并解决问题的能力.

2.2 对少教多学的几点反思

2.2.1 对"少教"的认识

"少教"并不是要求教师在课堂中不教,当然更不意味着数学知识的缩水和难度的降低,而是对老师的"教"提出了更高的要求,强调教的精要、巧妙与高效.本节课是一节解三角形的复习课,大多数学生对于主要内容还是有所知晓的,那么在这样的前提下,教师更要注意教的"少而精".在例题给出之前,教师以"关于三角形中的知识,你都了解哪些?"进入主题,而不是以告知的方式给出正、余弦定理等其他的相关内容,这是"少教";当学生完成例题的板演时,教师没有急着给出评价,而是让学生完成点评过程;当老师发现学生在解题过程中都先通过画出草图来帮助分析,却没有意识到在解决与图形有关的问题,画图是一种非常重要的研究手法时,教师并没有急着给出提示,而是通过元认知的问题问大家:"同学们在分析解决这个问题的过程中,都做了哪些工作?"让学生有所顿悟,这是"巧教";另外不管在例题还是变式中,当学生点评总结结束时,教师并没有马上进入下一个习题的练习,而是在学生总结的基础之上再进行提炼、归纳,使整个过程进入升华阶段,进而更好地构建学生的知识思维体系,这是"精教".德国教育学家第斯多惠在《德国教师培养指南》一书中指出:"教学的艺术不在于传授的本领,而在于激励、唤醒、鼓舞".本节课的整个教学过程,教师的所作所为都在帮助、激起、强化、优化学生的深度思维学习的能力.

2.2.2 对"多学"的认识

"多学"强调的是教师要把学生"可以多学的应有权利"还给学生,给学生创造更多的时间、空间、方式、机会进行独立有效的学习,获得除知识、技能以外的更高层次的收获,进而培养学生的数学学科核心素养以及获得育人的价值.多学的过程是积极、独立、有深度的学习.教学中,学生完成例题的板演后,教师提出:"哪个做得最好,好在哪里?哪个需要完善,请大家帮助他完善."以及"为什么要用余弦定理?"等问题,学生在这里积极、用心参与,这个过程中,学生自主思考、自主领悟,从中得到很多宝贵的解题经验和心得,虽然有的地方总结的并不完整,但这是积极、独立的亲自参与的学习;例题结束后,教师又提出"通过刚才解决的这个问题,你还有哪些收获?"的问题,学生从元知识、方法层面归纳出一些结论,进入升华阶段,学生的思维能力得到提升,是深度的学;这样的没有老师包办代替的课堂,才是学生真正多学的课堂.正如著名的特级教师武凤霞老师说过:"在充满生长律动的课堂上,学习气氛不一定是热烈的,但要深沉,学生不能在文字中浮光掠影,要在思索中前行;不是在言说别人思想,一定是在表达自己心声."

课堂上,教师只有"少教"了,学生才有机会"多学",这是毋庸置疑的.学生的"多学",是其各个方面能力的提升的体现,包括分析和解决问题的能力、思维水平的能力等等.作为教师,实现培养解题能力和提升数学核心素养的可持续发展应该是我们所追求的目标.

参考文献:

[1]陈小波.挖掘例题的育人价值,发展学生的核心素养[J].中学数学教学参考,2019(4):69-71.

[2]易文辉.高中数学发展学生数学学科核心素养的策略分析[J].中学数学教学参考,2019(4):16-20.

[3]张士民."少教多学"概念阐述及质量保障体系的建构[J],江苏教育研究,2018(379-380):54-58.

[4]张士民."少教多学"背景下的教学设计[J].数学通报,2016(7),21-24.

[5]涂荣豹,王光明,宁连华.新编数学教学论[M].上海:华东师范大学出版社,2006.9.

[6]波利亚.怎样解题:数学思维的新方法[M].涂泓,冯承天译.上海科技教育出版社,2007:12-13.